

ДИНАМІКА ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗМІННИМИ ЗА ЧАСОМ ПАРАМЕТРАМИ ТА НЕЛІНІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ ДЕМПФУВАННЯ У РАЗІ НАЯВНОСТІ ЛОКАЛІЗОВАНОГО ЗОВНІШНЬОГО ЗБУРЕННЯ

Гришак В. З.

*доктор технічних наук, професор,
професор кафедри конструювання, технічної естетики і дизайну
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
пр-т Дмитра Яворницького, 19, Дніпро, Україна
orcid.org/0000-0001-8685-3191
Hryshchak.V.Z@nmu.one*

Руденко Д. О.

*аспірантка
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0009-0007-8880-153X
dar.rudenko97@gmail.com*

Ключові слова: асимптотико-чисельний алгоритм, змінні за часом параметри, наближений аналітичний розв'язок, нелінійна функція демпфування, локалізоване збурення, функція Дірака.

Актуальним завданням у математичній фізиці постає розробка аналітично-числових методик для вивчення динамічних характеристик нелінійних еластичних систем. Їх застосовують у різних сферах, таких як авіаційна промисловість, суднобудування, будівництво споруд, машинобудівна галузь, ракетобудування, а також у виробництві двигунів і промислового обладнання. Функція Дірака служить потужним математичним засобом, без якого неможливо уявити багато фізичних дисциплін. Вона є фундаментальним поняттям, що широко використовується в галузі фізики. Важливість δ -функції Дірака особливо підкреслена в математичній фізиці. Це стосується таких галузей, як електродинаміка, газова динаміка, оптика, акустика, квантова механіка, аеродинаміка та гідродинаміка. Отже, постає потреба у створенні дієвих гібридних наближених аналітико-числових алгоритмів дослідження, що ґрунтуються на передових асимптотичних методах. Мова про ті системи, чий параметри зазнають змін у часі та у просторі під локалізованим зовнішнім впливом, який математично описується δ -функцією Дірака. Важливо підкреслити, що лише вкрай особливі випадки дозволяють отримати точні аналітичні розв'язки для таких задач. Останні, як правило, представлені диференціальними рівняннями сингулярного типу із змінними коефіцієнтами або їх системами. Ускладнення також виникають через присутність параметрів біля старшої похідної рівняння та нелінійної компоненти. Обговорюється аналітико-чисельний алгоритм розв'язку задачі нелінійної динаміки пружної системи із змінними у часі параметрами і нелінійною функцією демпфування з урахуванням впливу зовнішнього локалізованого збурення. Представлено результати розрахунків за запропонованим аналітичним алгоритмом із застосуванням комп'ютерної алгебри. Виконано порівняння у ключових моментах аналізу із даними прямого чисельного інтегрування основного диференціального рівняння досліджуваної задачі. Використовуючи програму комп'ютерної алгебри «Mathematica» побудовано графіки результатів обчислень і графіки порівняння з прямим чисельним інтегруванням.

DYNAMICS OF AN ELASTIC SYSTEM WITH TIME-VARYING PARAMETERS AND A NONLINEAR DAMPING FUNCTION IN THE PRESENCE OF A LOCALIZED EXTERNAL DISTURBANCE

Gristchak V. Z.

*Doctor of Technical Sciences, Professor,
Professor at the Department of Construction, Technical Aesthetics and Design
National Technical University "Dnipro Polytechnic"
Dmytro Yavornytskyi Ave., 19, Dnipro, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8685-3191
Hryshchak.V.Z@nmu.one*

Rudenko D. O.

*Postgraduate Student
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0009-0007-8880-153X
dar.rudenko97@gmail.com*

Key words: asymptotic numerical algorithm, time-varying parameters, approximate analytical solution, nonlinear damping function, localized perturbation, Dirac function.

The development of analytical and numerical methods for studying the dynamic characteristics of nonlinear elastic systems is an urgent task in mathematical physics. They are used in various fields, such as the aviation industry, shipbuilding, building construction, mechanical engineering, rocketry, as well as in the production of engines and industrial equipment. The Dirac function serves as a powerful mathematical tool without which many physical disciplines are unimaginable. It is a fundamental concept widely used in the field of physics. The importance of the Dirac δ -function is particularly emphasised in mathematical physics. This applies to such fields as electrodynamics, gas dynamics, optics, acoustics, quantum mechanics, aerodynamics, and hydrodynamics. Therefore, there is a need to create effective hybrid approximate analytical and numerical research algorithms based on advanced asymptotic methods. We are talking about those systems whose parameters undergo changes in time and space under localised external influence, which is mathematically described by the δ -Dirac function. It is important to emphasise that only very special cases allow us to obtain exact analytical solutions for such problems. The latter are usually represented by singular value differential equations with variable coefficients or their systems. Complications also arise due to the presence of parameters near the highest derivative of the equation and the nonlinear component. The analytical-numerical algorithm for solving the problem of nonlinear dynamics of an elastic system with time-varying parameters and a nonlinear damping function taking into account the influence of an external localized disturbance is discussed. The results of calculations using the proposed analytical algorithm with the use of computer algebra are presented. The key points of the analysis are compared with the data of direct numerical integration of the basic differential equation of the problem under study. Using the computer algebra program "Mathematica", graphs of the calculation results and graphs of comparison with direct numerical integration are constructed.

Вступ. Розробка аналітико-чисельних підходів до розрахунку динамічних характеристик нелінійних пружних систем із змінними у часі і координатами параметрів у разі дії локалізованого зовнішнього збурення, яке описується функцією Дірака, є актуальною

задачею математичної фізики [1–7]. Як відомо, точні аналітичні розв'язки вказаних проблем, які зводяться до диференціальних рівнянь сингулярного типу із змінними коефіцієнтами та їх систем, у разі наявності параметрів при старшій похідній розв'язуваль-

ного рівняння і нелінійній складовій частині можуть бути здобуті лише у виняткових випадках. У зв'язку із застосуванням комп'ютерної алгебри асимптотичні методи дають можливість єдиного підходу до різних прикладних задач, зокрема нелінійної динаміки конструкцій у разі локалізованого збурення [8; 9]. Тому виникає необхідність у розробці ефективних гібридних наближених аналітико-чисельних алгоритмів [10; 11] дослідження на базі сучасних асимптотичних підходів. Останнім часом значна увага приділяється методам, що дозволяють розширити область застосування асимптотичних підходів за параметрами розвинення для аналізу статико-динамічних процесів [12].

У цій роботі обговорюється аналітико-чисельний алгоритм розв'язку задачі нелінійної динаміки пружної системи із змінними у часі параметрами і нелінійною функцією демпфування n -ого ступеня з урахуванням впливу зовнішнього локалізованого збурення.

1. Постановка і розв'язок задачі динаміки пружної системи із нелінійною функцією демпфування

Розглядається розв'язок диференціального рівняння другого порядку з нелінійною першою похідною у формі:

$$y'' + \varepsilon a(x) y''' + \lambda^2 b(x) y = 0, \quad (1)$$

де $y(x)$ – шукана функція;

$a(x), b(x)$ – задані функції;

n – ступінь першої похідної;

ε, λ – параметри з умовою, що $\varepsilon < 1$ та $\lambda > 1$.

Як початкові умови приймається:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (2)$$

За допомогою методу збурення [12] отримується розв'язок рівняння у вигляді:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i y_i(x). \quad (3)$$

Розглядаються перші два елементи (3) для отримання загального розв'язку:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x), \quad (4)$$

$$y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon a(x)[y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x)]' + \lambda^2 b(x)[y_0(x) + \varepsilon y_1(x)] = 0. \quad (5)$$

Перша початкова умова підставляється в розв'язок (4):

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) = 1. \quad (6)$$

У разі однакових ступенів параметру ε отримуємо:

$$y_0(0) = 1, \quad y_1(0) = 0. \quad (7)$$

Друга початкова умова:

$$y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) = 0 \quad (8)$$

приводить до залежностей:

$$y_0'(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0. \quad (9)$$

У разі першого наближення за параметром ε розглядається однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$y_0'' + \lambda^2 b(x) y_0 = 0. \quad (10)$$

Після заміни $\mu = \frac{1}{\lambda}$ у (10) отримується рівняння у формі:

$$\mu^2 y_0'' + b(x) y_0 = 0, \quad (11)$$

де μ – малий параметр.

Під час розв'язання рівняння (11), згідно з методом фазних інтегралів, маємо:

$$y_0(x) = \exp\left(\int \varphi(x) d\xi\right), \quad (12)$$

де $\varphi(x) = \mu^{-1} \varphi_0(x) + \mu^0 \varphi_1(x) + \dots$ – невідомі функції.

Розглядаючи лише перший член розвинення, у рівнянні (12) знайдемо першу та другу похідні $y_0(x)$:

$$y_0'(x) = \varphi(x) \exp\left(\int \varphi(x) d\xi\right), \quad (13)$$

$$y_0''(x) = (\varphi^2(x) + \varphi'(x)) \exp\left(\int \varphi(x) d\xi\right). \quad (14)$$

Підставляючи (12), (13) і (14) у рівняння (11), буде знайдено розв'язок для функції $\varphi_0(x)$:

$$\varphi_0^2(x) = -b(x), \quad (15)$$

$$\varphi_{0,2}(x) = \pm i b(x)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Отже, розв'язок рівняння (11) за методом ВКБ [13] має вигляд:

$$y_0(x) = C_1 \sin(k(x)) + C_2 \cos(k(x)), \quad (17)$$

де $k(x) = \int \mu^{-1} \varphi_0(x) dx = \int \lambda b(x)^{\frac{1}{2}} dx = \lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx$.

У результаті розв'язок (17) матиме вигляд:

$$y_0(x) = C_1 \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + C_2 \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (18)$$

У разі застосування першої початкової умови у розв'язку (18) знаходиться значення коефіцієнта C_2 :

$$y_0(0) = C_1 \sin\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}} dx\right) + C_2 \cos\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}} dx\right) = 1. \quad (19)$$

$$= C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2 = 1$$

Знайдемо першу похідну (18):

$$y_0'(x) = C_1 \lambda b(x)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) - C_2 \lambda b(x)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (20)$$

За умови застосування другої початкової умови до першої похідної (20) значення коефіцієнта C_1 є таким:

$$y_0'(0) = C_1 \lambda b(0)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}} dx\right) - C_2 \lambda b(0)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}} dx\right) = 0 \quad (21)$$

З таких розрахунків випливає, що коефіцієнт $C_1 = 0$, а коефіцієнт $C_2 = 1$. Отже, розв'язок рівняння (10) має вигляд:

$$y_0(x) = \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (22)$$

На другому наближенні, прирівнюючи коефіцієнти за однакових ступенів ε^1 , отримуємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$y_1'' + \lambda^2 b(x) y_1 = -\varepsilon a(x) y_0''', \quad (23)$$

Частинний розв'язок рівняння (23) шукається за допомогою методу варіації довільної сталої [13], тобто розв'язок буде мати вигляд:

$$y_1(x) = y_1^3(x) + y_1''(x), \quad (24)$$

де $y_1^3(x)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння, $y_1''(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння від (23) записується у формі:

$$y_1''' + \lambda^2 b(x) y_1^3 = 0. \quad (25)$$

Загальне рішення рівняння (25) має вигляд:

$$y_1^3(x) = C_1 \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + C_2 \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (26)$$

Зробивши заміну констант на невідомі функції:

$$C_1 = d_1(x), \quad C_2 = d_2(x) \quad (27)$$

у розв'язку (26), маємо частинне рішення неоднорідного рівняння (23):

$$y_1''(x) = d_1(x) \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + d_2(x) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (28)$$

Використовуючи метод варіації довільної сталої для розв'язання рівняння, отримується система:

$$\begin{cases} d_1'(x) \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + d_2'(x) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) = 0 \\ d_1'(x) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) - d_2'(x) \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) = \frac{-\varepsilon a(x) y_0'''}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (29)$$

Із системи можемо знайти значення невідомих функцій. Для цього з (29) виразимо похідні $d_1'(x)$, $d_2'(x)$:

$$d_1'(x) = -\frac{\varepsilon a(x) y_0''' \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}}, \quad (30)$$

$$d_2'(x) = \frac{\varepsilon a(x) y_0''' \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}}. \quad (31)$$

Після інтегрування виразів (30) і (31) отримуються невідомі функції $d_1(x)$, $d_2(x)$:

$$d_1(x) = \int -\frac{\varepsilon a(x) y_0''' \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}} dx = \varepsilon (-\lambda)^{n-1} \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx, \quad (32)$$

$$d_2(x) = \int \frac{\varepsilon a(x) y_0''' \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}} dx = -\varepsilon (-\lambda)^{n-1} \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} \sin^{n+1}\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx. \quad (33)$$

Підставляючи результати (32) та (33) у (28), отримаємо розв'язок рівняння (23):

$$y_1(x) = \varepsilon (-\lambda)^{n-1} \sin\left(\frac{\lambda}{2} x^2\right) \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx - \varepsilon (-\lambda)^{n-1} \cos\left(\frac{\lambda}{2} x^2\right) \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} \sin^{n+1}\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx. \quad (34)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) представляється у формі:

$$y(x) = \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + \varepsilon \left[d_1(x) \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + d_2(x) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) \right], \quad (35)$$

де

$$d_1(x) = \varepsilon (-\lambda)^{n-1} \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx, \quad (36)$$

$$d_2(x) = -\varepsilon (-\lambda)^{n-1} \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} \sin^{n+1}\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx. \quad (37)$$

2. Приклад розв'язку задачі динаміки пружної системи для вільних коливань із нелінійним демпфуванням і локалізованим збуренням

В умовах вільних коливань системи права частина рівняння (1)

$$D_0(x) = 0 \Rightarrow y(x) = y[x, d_1(x), d_2(x)]. \quad (38)$$

За наявності локального збурення досліджуваної системи основне рівняння задачі має вигляд:

$$y''(x) + \varepsilon a(x) y''(x) + \lambda^2 b(x) y(x) = A_0 \delta(x - x_0), \quad (39)$$

де $\delta(x - x_0)$ – функція Дірака.

Застосовуючи метод збурення у формі

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x), \quad (40)$$

з початкових умов отримаємо залежності:

$$a) \quad y(0) = 1, \quad (41)$$

$$b) \quad y'(0) = 0. \quad (42)$$

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) = 1 :$$

$$y_0(0) = 1,$$

$$y_1(0) = 0.$$

$$y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) = 0 :$$

$$y_0'(0) = 0,$$

$$y_1'(0) = 0.$$

З урахуванням (40) рівняння (39) має вигляд:

$$y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon a(x)[y_0(x) + \varepsilon y_1(x)]^n + \lambda^2 b(x)[y_0(x) + \varepsilon y_1(x)] = A_0 \delta(x - x_0). \quad (43)$$

У першому наближенні отримуємо рівняння у формі

$$\varepsilon^0 : y_0''(x) + \lambda^2 b(x) y_0(x) = A_0 \delta(x - x_0), \quad (44)$$

$$\text{де } D_0(x) = A_0 \delta(x - x_0). \quad (45)$$

Вводячи параметр $\mu = \frac{1}{\lambda}$, неоднорідне рівняння (44) розв'язується застосуванням методів варіації довільних сталих і фазних інтегралів:

$$\mu^2 y_0''(x) + b(x) y_0(x) = D_0(x) \quad (46)$$

$$\psi_0^3(x) = C_1 \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + C_2 \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (47)$$

Частинний розв'язок отримується за стандартною процедурою інтегрування неоднорідного рівняння у відповідності до $D_0(x)$.

Наприклад, для функції

$$b(x) = x^2 \quad (48)$$

отримується загальний розв'язок

$$\psi_0^3(x) = C_1 \sin\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) + C_2 \cos\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right). \quad (49)$$

За початковими умовами

$$\psi_0(0) \Rightarrow y_0(0) = 1 \Rightarrow y_0(0) = \psi_0(0) + \bar{\psi}_0(0) = 1 \quad (50)$$

і параметрами системи

$$D_0(x) = 0, n = 3, b(x) = x^2, a(x) = x, \quad \varepsilon = 0, 1, \lambda = 10 \quad (51)$$

отримується розв'язок

$$y(x) = \cos\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) + \varepsilon \left[d_1(x) \sin\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) + d_2(x) \cos\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) \right], \quad (52)$$

$$\text{де } d_1(x) = \varepsilon (-\lambda)^2 \int x^3 \sin^2\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) \cos\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) dx, \quad (53)$$

$$d_2(x) = -\varepsilon (-\lambda)^2 \int x^3 \sin^4\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) dx. \quad (54)$$

Підставивши (51) у (53) і (54), отримуємо:

$$d_1(x) = 10 \int x^3 \sin^2(5x^2) \cos(5x^2) dx \quad (55)$$

$$d_2(x) = -10 \int x^3 \sin^4(5x^2) dx. \quad (56)$$

$$d_1(x) = -0,25 \cos(10x^2) + 0,025 \sin(10x^2) \quad (57)$$

$$d_2(x) = -0,9375x^4 + 0,025 \cos(10x^2) - 0,0015625 \cos(20x^2) + 0,25x^2 \sin(10x^2) - 0,03125x^2 \sin(20x^2). \quad (58)$$

3. Результати чисельних розрахунків і порівняння із прямим чисельним методом аналізу

На рисунках 1–3 представлено результати чисельних розрахунків і їх порівняння із прямим чисельним методом аналізу, виконані із використанням програми комп'ютерної алгебри «Mathematica» [14]. Показано подібність поведінки графіків. Деяка розбіжність зумовлена використанням першого наближення у побудові графіків. Особливістю цього підходу є те, що гібридний метод дає можливість побудувати аналітичні розв'язки для малих величин та параметрів.

Висновки. Запропоновано асимптотико-чисельний алгоритм розв'язку задач динаміки пружних систем із змінними у часі параметрами і нелінійною функцією демпфування n -ого ступеня і наявності локалізованого збурення. Ефект зовнішнього локалізованого збурення можна суттєво зменшити застосуванням відповідних параметрів досліджуваної системи. Поліпшення здобутих розв'язків з точки зору величини параметрів асимптотичного розв'язку досягається застосуванням запропонованого гібридного асимптотичного підходу на базі методів збурення і фазних інтегралів за параметрами у разі нелінійного складника і сингулярності базового рівняння із залученням принципу ортогоналізації за Гальоркіним [13] та застосуванням комп'ютерної алгебри, зокрема системи «Mathematica» [14].

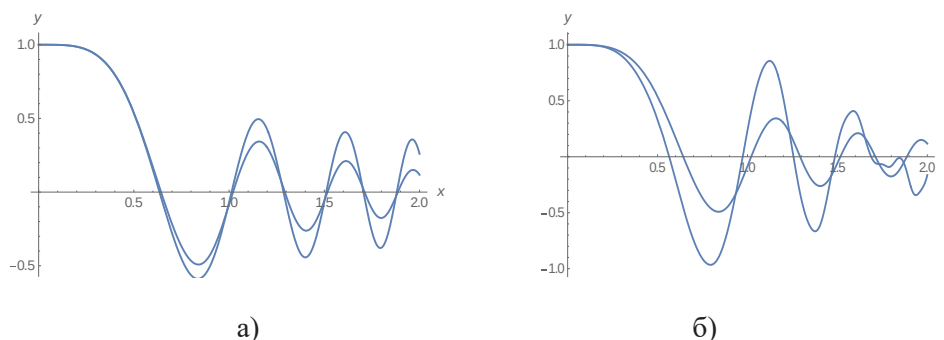


Рис. 1. Вільні коливання системи із нелінійним демпфуванням:
а) вплив нелінійного демпфування; б) порівняння з чисельним розв'язком

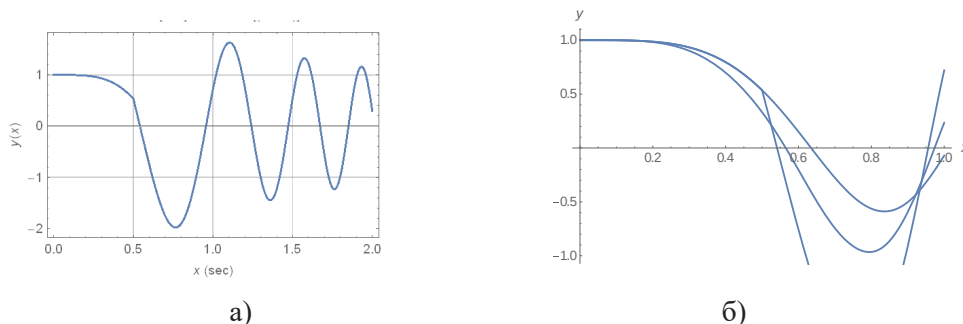


Рис. 2. Вплив локалізованого зовнішнього збурення:

а) характер впливу локалізованого збурення; б) порівняння аналітичного і чисельного розв'язків у разі локалізованого зовнішнього збурення

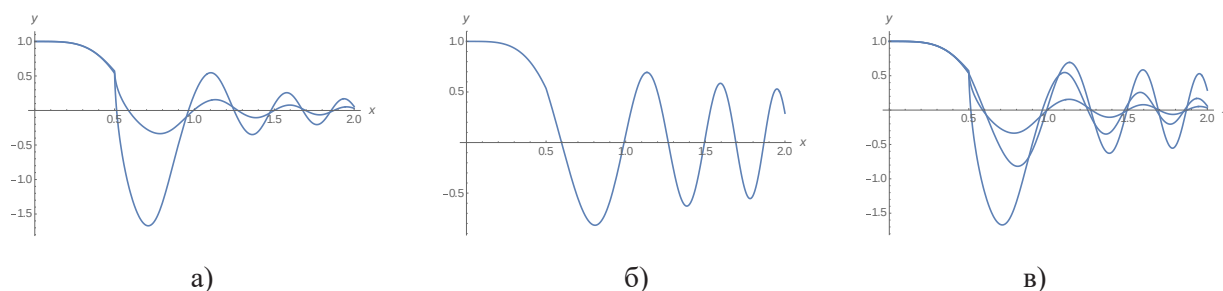


Рис. 3. Керування динамічним процесом параметрами системи:

а) вплив амплітуди першої похідної; б) вплив ефекту локалізованого збурення функції демпфування (функція Дірака при першій похідній); в) вплив досліджуваних ефектів

ЛІТЕРАТУРА

1. Ключ І.С. Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. *Вісник Національного авіаційного університету*. 2006. Т. 4. С. 209–211.
2. Крутій Ю.С. Точний розв'язок диференціального рівняння вимушених поздовжніх коливань стержня з довільними неперервними параметрами. *Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки*. 2015. Т. 6. № 231. С. 23–29.
3. Javidi M., Ahmad B. Numerical solution of fourth-order time-fractional partial differential equations with variable coefficients. *Journal of Applied Analysis & Computation*. 2015. Vol. 5. No. 1. P. 52–63. URL: <https://doi.org/10.11948/2015005>.
4. Reutskiy S.Y. A new semi-analytical collocation method for solving multi-term fractional partial differential equations with time variable coefficients. *Applied Mathematical Modelling*. 2017. Vol. 45. P. 238–254. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.12.029>.
5. Hao Z., Park M., Lin G., Cai Z. Finite element method for two-sided fractional differential equations with variable coefficients: Galerkin approach. *Journal of Scientific Computing*. 2018. Vol. 79. No. 2. P. 700–717. <https://doi.org/10.1007/s10915-018-0869-5>.
6. Самойленко В., Самойленко Ю. Асимптотичний аналіз сингулярно збурених рівнянь інтегрованого типу зі змінними коефіцієнтами. *Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук : збірник наукових праць*, м. Львів. Львів, 2021. С. 161–164.
7. Vassouch M. The discontinuous Galerkin method for general nonlinear third-order ordinary differential equations. *Applied Numerical Mathematics*. 2021. Vol. 162. P. 331–350. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.01.003>.
8. Гришак В.З., Руденко Д.О. До аналізу нелінійних коливань пологих оболонок із функціонально-градієнтних матеріалів зі змінними у часі параметрами за наявності локалізованого збурення. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2025. Т. 1. № 38. С. 51–63. <https://doi.org/10.15421/4224104>.
9. Гришак В.З., Руденко Д.О. Hybrid asymptotic approach to solving nonlinear differential equations with variable coefficients in the presence of the δ -function. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2024. No. 1. P. 5–10. <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-1-01>.

10. Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation – Galerkin technique for partial differential equations. *Asymptotic Analysis and Numerical Solution of Partial Differential Equations*. 1990. Vol. 130. P. 113–134.
11. Geer J.F., Andersen C.M. Resonant frequency calculations using a hybrid perturbation-Galerkin technique. *Applied Mechanics Reviews*. 1991. Vol. 44, no. 11S. P. S76–S88. <https://doi.org/10.1115/1.3121376>.
12. Gristchak V.Z., Dmitrijeva Y.M. A hybrid WKB-Galerkin method and its application. *Technische mechanik*. 1995. Vol. 15. No. 4. P. 281–294.
13. Гришчак В.З. Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2009. 226 с.
14. Wolfram S. *Mathematica: a system for doing mathematics by computer*. 2nd ed. Reading, Mass : Addison-Wesley Pub. Co., 1991. 961 p.

REFERENCES

1. Klyus, I.S. (2006). Multipoint problem for partial differential equations with variable coefficients. *Visnyk of the National Aviation University*, 4, 209–211 [in Ukrainian].
2. Krutii, Y.S. (2015). Exact solution of the differential equation of forced longitudinal vibrations of a rod with arbitrary continuous parameters. *Visnyk of the Khmelnytsky National University. Technical sciences*, 6(231), 23–29 [in Ukrainian].
3. Javidi, M. & Ahmad, B. (2015). Numerical solution of fourth-order time-fractional partial differential equations with variable coefficients. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 5(1), 52–63. <https://doi.org/10.11948/2015005>.
4. Reutskiy, S.Y. (2017). A new semi-analytical collocation method for solving multi-term fractional partial differential equations with time variable coefficients. *Applied Mathematical Modelling*, 45, 238–254. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.12.029>.
5. Hao, Z., Park, M., Lin, G., & Cai, Z. (2018). Finite element method for two-sided fractional differential equations with variable coefficients: Galerkin approach. *Journal of Scientific Computing*, 79(2), 700–717. <https://doi.org/10.1007/s10915-018-0869-5>.
6. Samoilenko, V. & Samoilenko, Yu. (2021). Asymptotic analysis of singularly perturbed integral-type equations with variable coefficients. *Modern problems of applied mathematics and computer science*. P. 161–164. Ivan Franko National University of Lviv [in Ukrainian].
7. Baccouch, M. (2021). The discontinuous Galerkin method for general nonlinear third-order ordinary differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 162, 331–350. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.01.003>.
8. Grishchak, V.Z. & Rudenko, D.O. (2024). Hybrid asymptotic approach to solving nonlinear differential equations with variable coefficients in the presence of the δ -function. *Computer Science and Applied Mathematics*, (1), 5–10. <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-1-01>.
9. Grishchak, V.Z. & Rudenko, D.O. (2025). To the analysis of nonlinear oscillations of shallow shells of functional-gradient materials with time-varying parameters in the presence of localized disturbance. *Problems of computational mechanics and strength of structures*, 1(38), 51–63. <https://doi.org/10.15421/4224104> [in Ukrainian].
10. Geer, J.F., & Andersen, C.M. (1990). A hybrid perturbation – Galerkin technique for partial differential equations. *Asymptotic Analysis and Numerical Solution of Partial Differential Equations*, 130, 113–134.
11. Geer, J.F., & Andersen, C.M. (1991). Resonant frequency calculations using a hybrid perturbation-Galerkin technique. *Applied Mechanics Reviews*, 44(11S), S76–S88. <https://doi.org/10.1115/1.3121376>.
12. Gristchak, V.Z., & Dmitrijeva, Y.M. (1995). A hybrid WKB-Galerkin method and its application. *Technische mechanik*, 15(4), 281–294.
13. Hryshchak V.Z. (2009). *Hybrid asymptotic methods and techniques for their application*. Zaporizhzhia National University [in Ukrainian].
14. Wolfram, S. (1991). *Mathematica: A system for doing mathematics by computer*. 2nd ed. Addison-Wesley Pub. Co.