

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-03>

ЗАДАЧА ПРО ЗНОШУВАННЯ ОСНОВИ ВІНКЛЕРІВСЬКОГО ТИПУ ПРЯМОКУТНИМ У ПЛАНІ ШТАМПОМ ЗА СТЕПЕНЕВОГО ЗАКОНУ ЗНОШУВАННЯ

Дугієнко О. Е.

магістр математики

Запорізький національний університет

вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна

orcid.org/0000-0001-9201-5709

aleksandrdugienko@gmail.com

Д'яченко Н. М.

кандидат фізико-математичних наук, доцент,

доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики

Запорізький національний університет

вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна

orcid.org/0000-0001-5284-4502

dyachenkonata69@gmail.com

Ключові слова:

*зносоконтактна задача,
метод половинного
ділення, метод послідовних
наближень, метод скінченних
різниць, метод степеневих
рядів, прямокутний у
плані штамп з плоскою
або неплоскою підшвою,
усталений знос.*

Зношування характеризує процес видалення матеріалу з поверхні контактуючих тіл. Відомо, що залежність швидкості зношування від контактного тиску виражається лінійним або степеневим законом.

Розглянуто контактну задачу зношування основи вінклерівського типу внаслідок руху по ній прямокутного в плані штампа на стадії усталеного зносу. Постановка такої задачі викладена в літературі, де також знайдено формули аналітичного її розв'язку у випадку лінійного закону зношування.

Робота присвячена дослідженню методів розв'язання задачі за степеневому закону зношування. Задача моделюється диференціальним або еквівалентним йому інтегральним розв'язувальним рівнянням та умовою рівноваги сил.

У випадку плоского штампа нелінійне диференціальне рівняння має аналітичний розв'язок. Для штампа з неплоскою підшвою викладено підходи до використання чисельного методу скінченних різниць на основі лівих або правих різницевих відношень. До розв'язання інтегрального рівняння застосовано метод послідовних наближень і метод степеневих рядів. За результатами застосування всіх зазначених методів отримано функції, що залежать від невідомого параметра, який знаходиться з умови рівноваги з використанням методу половинного ділення.

Проведено порівняльний аналіз результатів, отриманих різними підходами. Числові результати отримано для прямокутних у плані штампів із неплоскими підшвами, що визначаються певними поліноміальними або тригонометричними функціями. Виявлено вплив закону зношування, фізичних на геометричних параметрів на зносоконтактні характеристики.

THE PROBLEM OF WEARING A WINKLEER-TYPE FOUNDATION WITH A RECTANGULAR PLAN PUNCH ACCORDING TO THE POWER LAW OF WEAR

Dugienko O. E.

*Master of Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9201-5709
aleksandrdugienko@gmail.com*

Dyachenko N. M.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5284-4502
dyachenkonata69@gmail.com*

Key words: wear-contact problems, method of division in half, iterative method, method of finite differences, method of power series, a rectangular punch with a plane or non-plane sole, constant wear.

Wear characterizes the process of removing material from the surface of contacting bodies. It is known that the dependence of the wear rate on the contact pressure is expressed by a linear or power law.

The contact problem of wear of the foundation of the Winkler type due to the movement of a stamp rectangular in plan on it at the stage of steady wear is considered. The formulation of such a problem is described in the literature, where formulas for its analytical solution in the case of a linear wear law are also found.

The work is devoted to the study of methods of solving the problem according to the power law of wear. The problem is modeled by a differential or equivalent integral solving equation and a force equilibrium condition.

In the case of a plane punch, the nonlinear differential equation has an analytical solution. For a punch with a non-plane sole, approaches to using the numerical method of finite differences based on left or right difference relations are outlined. The iterative method and the power series method are used to solve the integral equation. As a result of the application of all the mentioned methods, functions are obtained that depend on the unknown parameter, which is from the equilibrium condition using the method of half-division.

A comparative analysis of the results obtained by different approaches was carried out. Numerical results were obtained for rectangular punches with non-plane soles defined by certain polynomial or trigonometric functions. The influence of the law of wear, physical and geometric parameters on wear contact characteristics was revealed.

Вступ. Процеси контактної взаємодії супроводжуються видаленням матеріалу з поверхні контактуючих тіл, що визначає зношування. В інженерній практиці руйнівні процеси зношування можуть привести до виходу з ладу машин і механізмів. Таким чином, дослідження зазначених процесів має практичне значення, тому зносоконтактним задачам присвячена значна кількість публікацій, серед яких роботи [1–19]. Звертає на себе увагу праця С. Y. Lee, L. S. Tian, J. W. Bae, Y. S. Chai [13], у якій розраховане контактне зношування внаслідок вібраційних навантажень U-подібних труб парогенераторів на атомних електростанціях.

Розглянемо контактну задачу про зношування півпростору прямокутним в плані штампом.

Огляд літератури. У роботах J. F. Archard [5], I. G. Goryacheva [9] викладено результати досліджень щодо залежності між швидкістю зношування та контактним тиском. Виявлено дві моделі, що підпорядковуються лінійному або степеневому законам зношування. Тут буде приділено більшу увагу нелінійному випадку.

лідок вібраційних навантажень U-подібних труб парогенераторів на атомних електростанціях.

У зносоконтактних задачах пружний півпростір часто моделюється основою Вінклерівського типу. Таку модель використано науковцями I. Argatov [6], S. Garcin, S. Baydoun, P. Arnaud, S. Fouvry [8], I. G. Goryacheva [9], J. Hu, F. Gao, X. Liu, Y. Wei [11], N. Menga, M. A. Ciavarella [14], P. Pödra, S. Andersson [16]. З метою аналізу ефективності вибраної моделі в роботах [8, 11, 14, 16] проводяться розрахунки на основі цієї моделі, а також інших моделей, які передбачають використанням специфічних для них методів, зокрема, методу скінченних елементів. Виявлено прийнятну узгодженість результатів, що свідчить про ефективність моделі Вінклера в зносоконтактних задачах. Саме цю модель використаємо тут.

Відомо [9; 15] про наявність двох основних стадій зношування – припрацювання й усталеного зносу. На стадії усталеного зносу розглянемо контактну задачу про зношування півпростору, що моделюється основою вінклерівського типу, внаслідок руху по ньому прямокутного в плані штампа.

У роботі [9] виведено розв'язувальні рівняння цієї задачі, наведено формули розв'язку у випадку лінійного закону зношування й отримано числові результати для штампа з плоскою підшвою та в одному з випадків неплоского штампа, якому відповідає рівномірна функція зносоконтактного тиску. Зазначені формули використаємо тут для отримання контактних характеристик лінійного закону зношення для штампів із неплоскою підшвою різної форми.

Розв'язок поставленої задачі у випадку нелінійного (степеневого) закону зношування в опублікованих роботах не знайдено. Спираючись на два типи подання розв'язувального рівняння як диференціального або інтегрального, дослідимо випадки отримання наближено-аналітичного або чисельного розв'язків.

Мета роботи – дослідити методи розв'язання рівнянь задачі про усталений знос пружної основи вінклерівського типу прямокутним у плані штампом, отримати числові результати для штампів з підшвою різної форми та провести аналіз впливу вхідних параметрів на зносоконтактні характеристики.

1. Загальна постановка задачі та рівняння, що її моделюють. Розглянемо півпростір, з яким пов'яжемо систему координат (x_1, y_1, z_1) , та штамп у рухомій системі (x, y, z) (рис. 1) [9]. Форма штампа є такою, що розріз площиною $x = \text{const}$ являє собою прямокутник. Штамп втискається у півпростір нормальною постійною силою P та рухається зі сталою швидкістю V в напрямку осі Ox , унаслідок чого поверхня півпростору зношується.

Припустимо, що в будь-який момент часу основа штампа всіма точками контактує з півпростором.

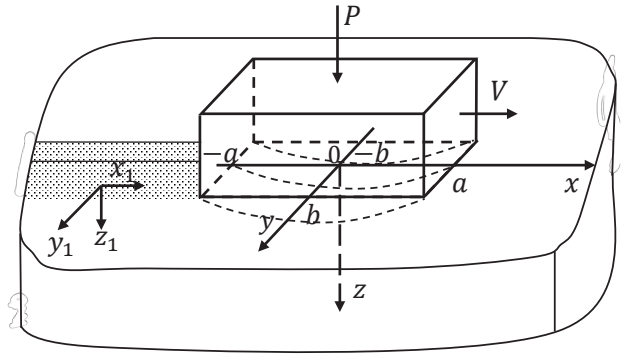


Рис. 1. Схема контактної взаємодії

Розглянемо функцію зносу півпростору $w_*(x_1, y_1, t)$. У загальному випадку залежність швидкості зносу від контактного тиску $p(x_1, y_1, t)$ визначається законом [5; 9]

$$\frac{\partial w_*}{\partial t}(x_1, y_1, t) = K_w p^\alpha(x_1, y_1, t) V^\beta(x_1, y_1, t), \quad (1)$$

де K_w – коефіцієнт зношування, що залежить від умов контакту, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$ – параметри закону зношування. При цьому параметр $\alpha > 1$ відповідає степеневому закону зношування, а $\alpha = 1$ – лінійному.

У рухомій системі координат, пов'язаній зі штампом, областю контакту є прямокутник на площині Oxy :

$$\Omega = [-a; a] \times [-b; b],$$

де $a > b$. Відомо [7; 9], що для штампа обраної форми у всіх точках площадки контакту $(x, y) \in \Omega$ функція тиску визначається формулою

$$p(x, y) = \frac{p_1(x)}{\pi \sqrt{b^2 - y^2}}.$$

У цій роботі, як і в роботах [8, 9, 11, 14, 16], півпростір моделюємо основою Вінклера, яка для цієї задачі визначається залежністю [9]

$$p_1(x) = k w_1(x), \quad (3)$$

$$k = \frac{\pi E}{2(1 - \nu^2) \lg\left(\frac{a}{b}\right)},$$

де E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона півпростору відповідно.

Таким чином, задачу зведено до плоскої постановки, яка потребує визначення контактних характеристик у площині $y = 0$. Тут розглядатимемо стадію усталеного зносу [9].

Зважаючи на припущення про повний контакт штампа з півпростором у будь-який момент часу, розглянемо ту точку $(x_1, 0)$ на межі півпростору, яка в момент часу $t = 0$ вступає в контакт [9], тоді $x_1 = a$; позначимо через $t(x)$ той момент часу, коли точка $(x, 0)$ в системі координат Oxy збіга-

тиметься з точкою $(x_1, 0)$; тоді $t(x) = \frac{a-x}{V}$, звідки $x = a - V \cdot t(x)$. У рухомій системі координат Oxy уведемо функції, що не залежать від часу:

$$W_*(x) = w_*(a, 0, t(x)), \quad W_*(x) = 0, \quad \text{якщо } x > a, \\ p_s(a - Vt) = p(a, 0, t).$$

Унаслідок цього співвідношення (1) перепишемо у вигляді [9]

$$W_*(x) = K_w V^{\beta-1} \int_x^a p_s^\alpha(x') dx'. \quad (4)$$

З (2), (3) та означення функцій $p_s(x)$ випливає, що

$$w_1(x) = \frac{\pi b}{k} p_s(x). \quad (5)$$

Умова контакту штамп з пружним півпростором в рухомій системі координат Oxz задається рівнянням [9]:

$$W_*(x) + w_1(x) = D - f(x), \quad (6)$$

де $f(x)$ – функція, що визначає поверхню штамп в площині $y = 0$, а D – осадка штамп. Враховуючи (4) та (5) та позначення

$$K_* = K_w V^{\beta-1}, \quad (7)$$

отримаємо рівняння [9]

$$K_* \int_x^a p_s^\alpha(x') dx' + \frac{\pi b}{k} p_s(x) = D - f(x);$$

продиференціюємо рівняння (8), одержимо

$$K_* p_s^\alpha(x) - \frac{\pi b}{k} p_s'(x) = f'(x). \quad (8)$$

Зважаючи на співвідношення (2) та означення функції $p_s(x)$, отримаємо

$$p_s(x) = p_s(a - Vt) = \frac{p_1(x)}{\pi \sqrt{b^2 - y^2}}_{y=0} = \frac{p_1(x)}{\pi b}.$$

Розглянемо рівняння рівноваги сил у загальному вигляді та спростимо його з використанням (10):

$$P = \oint p(x, y) dx dy = \int_{-b}^b \frac{dy}{\pi \sqrt{b^2 - y^2}} \int_{-a}^a p_1(x) dx = \pi b \int_{-a}^a p_s(x) dx.$$

Тоді умова рівноваги відносно функції $p_s(x)$ набуде вигляду:

$$\int_{-a}^a p_s(x) dx = P_0, \quad (11)$$

$$P_0 = \frac{P}{\pi b}.$$

Для переходу до безрозмірних величин покладемо [9]

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \tilde{p}_s(\xi) = \frac{\pi b p_s(a\xi)}{ka}, \quad \tilde{f}(\xi) = f(\xi a), \quad \tilde{W}_*(\xi) = \frac{W_*(a\xi)}{a},$$

$$\kappa = K_* \left(\frac{ak}{\pi b} \right)^\alpha = K_w V^{\beta-1} \left(\frac{aE}{2(1-\nu^2)b \lg\left(\frac{a}{b}\right)} \right)^\alpha, \quad \tilde{P} = \frac{K_* P_0}{a},$$

тоді диференціальне рівняння (9) та умова рівноваги (11) набудуть вигляду:

$$\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi) - \tilde{p}_s'(\xi) = \tilde{f}'(\xi), \quad (12)$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}_s(\xi) d\xi = \tilde{P}. \quad (13)$$

Рівняння (12) та (13) дають змогу знайти функцію $\tilde{p}_s(\xi)$. Для отримання цієї функції іншим способом, а також для визначення безрозмірної осадки штамп $\tilde{D} = \frac{D}{a}$ перепишемо інтегральне рівняння (8) в безрозмірних величинах

$$\kappa \int_{-1}^1 \tilde{p}_s^\alpha(\xi') d\xi' + \tilde{p}_s(\xi) = \tilde{D} - \tilde{f}(\xi).$$

Застосуємо співвідношення (4), щоб знайти формулу відносно безрозмірної функції зношування [9]

$$\tilde{W}_*(\xi) = \kappa \int_{-1}^1 \tilde{p}_s^\alpha(\xi') d\xi'. \quad (15)$$

За припущенням, у кожен момент часу підшва штамп має контактувати з поверхнею півпростору всіма точками. Для цього щонайменше необхідно накласти умову $\tilde{f}(\xi) \geq 0$ для всіх $\xi \in [-1; 1]$.

2. Відомі формули розв'язку задачі за лінійного закону зношування півпростору. За лінійного закону зношування, що відповідає показнику $\alpha = 1$, розв'язок задачі наведено в роботі [9]. Диференціальне рівняння (12) у цьому випадку є лінійним і має за загальний розв'язок функцію

$$\tilde{p}_s(\xi) = e^{\kappa\xi} \left(C - \int_{-1}^{\xi} \tilde{f}'(\xi') e^{-\kappa\xi'} d\xi' \right). \quad (16)$$

Невідома стала знайдена з умови рівноваги (13) у формі [9]:

$$C = \frac{1}{2sh\kappa} \left(\kappa \tilde{P} + \int_{-1}^1 \tilde{f}'(\xi') (e^{\kappa(1-\xi')} - 1) d\xi' \right). \quad (17)$$

У зазначеній роботі на стадії усталеного зносу визначено функцію тиску у випадку штамп з плоскою підшвою, тобто якщо $\tilde{f}'(\xi) = 0$,

$$\tilde{p}_s(\xi) = \frac{\kappa \tilde{P}}{2sh\kappa} e^{\kappa\xi}, \quad (18)$$

та функцію зношування

$$\tilde{W}_*(\xi) = \frac{\kappa \tilde{P}}{2sh\kappa} (e^\kappa - e^{\kappa\xi}). \quad (19)$$

Там також наведено графіки функцій (18) та (19) для різних параметрів κ .

Нижче застосовуватимемо формули (16), (17) та (15) для отримання зносоконтактних характеристик для штампів із неплоскою основою з метою порівняння результатів за різних законів зношування.

3. Наближений розв'язок задачі за степеневому закону зношування півпростору штампом із плоскою підшвою.

Аналітичний розв'язок диференціального рівняння. Розглянемо випадок штамп з плоскою підшвою $\tilde{f}(\xi) = 0$. Тоді рівняння (12) набуває вигляду

$$\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi) - \tilde{p}_s'(\xi) = 0. \quad (20)$$

Оскільки $\alpha > 1$, то рівняння (20) має аналітичний розв'язок вигляду

$$\tilde{p}_s(\xi) = \left(\frac{1}{(1-\alpha)(\kappa\xi + C)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

визначений за умови

$$\kappa\xi + C < 0.$$

Для отримання невідомого коефіцієнта C потрібно застосувати умову рівноваги (13). Обчислення інтеграла реалізуємо двома способами – аналітичним і чисельним із метою подальшого порівняння результатів.

Використання аналітичного значення інтеграла в рівнянні рівноваги. Обчислимо інтеграл аналітично й підставимо результат в умову рівноваги (13):

$$\frac{\alpha-1}{\alpha-2} \left(\frac{1}{\alpha-1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left\{ (\kappa-C)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} - (-\kappa-C)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} \right\} - \tilde{P} = 0. \quad (21)$$

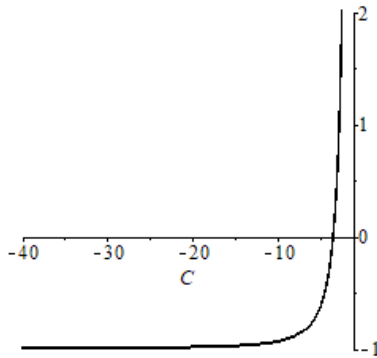


Рис. 2. Графічне подання функції $\psi(C)$, що відповідає лівій частині рівняння (21)

Для розв'язання рівняння (21) застосовуємо метод половинного ділення. Ліва частина рівняння (21) визначає функцію змінної C , яку позначимо $\psi_{\alpha,\kappa}(C)$. Існування єдиного розв'язку перевіряємо чисельним експериментом. А саме: для кожного набору вибраних для розрахунку вхідних параметрів α, κ будемо функції $\psi_{\alpha,\kappa}(C)$, у кожному з випадків отримуємо зростаючу функцію, яка перетинає вісь OC в одній точці проміжку $C \in (-\infty; -\kappa)$, що дає змогу дійти висновку про єдиність розв'язку рівняння (21), а також визначити відрізок зміни знака функції $\psi_{\alpha,\kappa}(C)$ для застосування методу половинного ділення. Для ілюстрації зазначеного підходу на рис. 2 побудовано графік такої функції для вхідних параметрів $\alpha = 1.4, \kappa = 1, \tilde{P} = 1$.

Таким чином, розв'язок цієї задачі визначається однозначно. Таке саме дослідження проводиться і в подальших випадках застосування методу половинного ділення.

Використання чисельного значення інтеграла в рівнянні рівноваги. Метод квадратур чисельного

інтегрування реалізуємо із застосуванням правих прямокутників, що зводить рівняння рівноваги (13) до вигляду

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{p}_s(\xi_k)(\xi_k - \xi_{k-1}) = \tilde{P}.$$

Невідому сталу знаходимо методом половинного ділення.

Функція профілю зношеної поверхні півпростору визначається формулою (15) як функція нижньої межі інтегрування. Для графічного подання функції знаходимо її значення в точках розбиття $\xi_k = -1 + \frac{2k}{n}, k = \overline{0, n}$ відрізка $[-1; 1]$. На кожному з відрізків $[\xi_k; 1]$ реалізуємо чисельне інтегрування.

Порівняльний аналіз числових результатів, отриманих різними підходами, проведемо на прикладі вибору параметрів $\alpha = 1.4, \kappa = 1, \tilde{P} = 1$. У випадку аналітичного обчислення інтеграла невідома стала отримала значення

$$C_{analit} = -3.470023157.$$

Чисельне інтегрування проводилося для різної кількості N відрізків розбиття проміжку $[-1; 1]$. Результати щодо отриманих значень невідомої константи наведено в табл. 1.

Таблиця 1
Значення константи, обчислені з використанням чисельного інтегрування, для різних N

	N		$C_{numeric}$
	20	-3.419547081	
	100	-3.460005761	
	200	-3.465020179	
	500	-3.468024257	
	1000	-3.469023705	

В обох способах розв'язання метод половинного ділення використовувався з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

Відхилення між результатами у двох способах обчислення інтеграла становлять: якщо $N = 20$ – до 1.5 %, якщо $N = 100$ – до 0.3 %, якщо $N = 1000$ – до 0.0003 %. Отже, використання $N = 100$ визначає високий рівень узгодження.

Для ілюстрації результатів розрахунків і порівняння контактних характеристик, що відповідають лінійному та степеневому законам зношування, вибрано параметри $\alpha = 1$ та $\alpha = 1.4$ відповідно та безрозмірну силу $\tilde{P} = 1$. На рис. 3 наведено графіки функцій тиску (рис. 3, а) та профілю зношеної поверхні (рис. 3, б). Штриховими лініями зображено графіки для лінійного закону, знайдені за формулами (18) та (19), а суцільними лініями – для степеневого. Останні відповідають розрахункам із використанням аналітичного інтегрування.

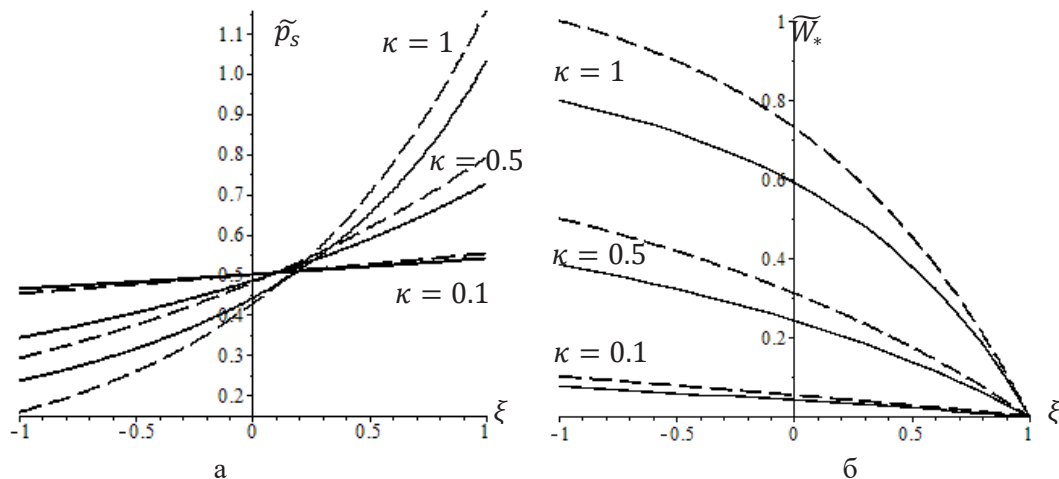


Рис. 3. Зносоконтактні характеристики під штампом з плоскою підшвою за степеневого та лінійного законів зношування

4. Випадок степеневого закону зношування півпростору штампом із неплоскою підшвою. Однозначність розв'язку задачі у випадку нелінійного закону зношування дослідимо, використовуючи подання розв'язувального рівняння задачі як інтегральне рівняння (14). Це нелінійне рівняння типу Вольтерра другого роду. Воно має єдиний розв'язок у просторі $C_{[-1;1]}$ функцій, неперервних на відрізку $[-1;1]$. Покажемо це. Розглянемо нелінійний оператор $Ay(\xi) = \kappa \int_{-1}^{\xi} y^{\alpha}(\xi') d\xi'$. Проведемо оцінювання з використанням формули Лагранжа за функціональним аргументом

$$|A\bar{y}(\xi) - A\bar{y}(\xi)| \leq \kappa \alpha (1 - \xi) \bar{y} - \bar{y}.$$

Тоді для натурального $k > 1$ матимемо

$$|A^k \bar{y}(\xi) - A^k \bar{y}(\xi)| \leq \kappa^k \alpha^k \frac{(1 - \xi)^k}{k!} \bar{y} - \bar{y};$$

$$A^k \bar{y} - A^k \bar{y} \leq \kappa^k \alpha^k \frac{2^k}{k!} \bar{y} - \bar{y}.$$

Отже, для деякого степеня k буде виконуватися нерівність $\kappa^k \alpha^k \frac{2^k}{k!} < 1$, разом із чим оператор A^k буде стискаючим, а рівняння (14) буде мати єдиний розв'язок, який можна знайти методом послідовних наближень

$$\bar{p}_{s,n+1}(\xi) = -\kappa \int_{-1}^{\xi} \bar{p}_{s,n}^{\alpha}(\xi') d\xi' - \tilde{f}(\xi) + \tilde{D}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

де за перше наближення можна обрати довільну функцію простору $C_{[-1;1]}$.

Оскільки рівняння (12) та (14) еквівалентні, то розв'язки обох збігаються, тож визначаються однозначно.

Розв'язання нелінійного диференціального рівняння методом скінченних різниць реалізуємо двома способами. Розглянемо два види різнице-

вих відношень першого порядку – ліві та праві. Розіб'ємо відрізок інтегрування $[-1;1]$ на N рівних частин точками

$$\xi_k = -1 + kh, \quad h = \frac{2}{N}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Наближене значення похідної в точці розбиття ξ_k може бути виражене лівими скінченими різницями

$$\tilde{p}'_s(\xi_k) = \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k-1}) - \tilde{p}_s(\xi_k)}{-h}, \quad k = \overline{1, N},$$

або правими –

$$\tilde{p}'_s(\xi_k) = \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k+1}) - \tilde{p}_s(\xi_k)}{h}, \quad k = \overline{0, N-1},$$

Для лівих і правих скінчених різниць диференціальне рівняння (12) в наближеному вигляді в точках ξ_k запишеться у формах відповідно

$$\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_k) - \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k-1}) - \tilde{p}_s(\xi_k)}{-h} = \tilde{f}'(\xi_k), \quad k = \overline{1, N} \quad (23)$$

або

$$\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_k) - \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k+1}) - \tilde{p}_s(\xi_k)}{h} = \tilde{f}'(\xi_k), \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (24)$$

Перепишемо систему (23) в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{p}_s(\xi_{N-1}) &= -h\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_N) + \tilde{p}_s(\xi_N) + h\tilde{f}'(\xi_N), \\ \tilde{p}_s(\xi_{N-2}) &= -h\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_{N-1}) + \tilde{p}_s(\xi_{N-1}) + h\tilde{f}'(\xi_{N-1}), \\ &\dots \\ \tilde{p}_s(\xi_{k-1}) &= -h\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_k) + \tilde{p}_s(\xi_k) + h\tilde{f}'(\xi_k) \quad (k = \overline{1, N}), \\ &\dots \\ \tilde{p}_s(\xi_1) &= -h\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_2) + \tilde{p}_s(\xi_2) + h\tilde{f}'(\xi_2), \\ \tilde{p}_s(\xi_0) &= -h\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_1) + \tilde{p}_s(\xi_1) + h\tilde{f}'(\xi_1), \end{aligned}$$

що дає змогу виразити всі невідомі $\tilde{p}_s(\xi_k)$ ($k = \overline{1, N}$) через $\tilde{p}_s(\xi_N)$.

Систему (24) запишемо у такий спосіб

$$\begin{aligned}\tilde{p}_s(\xi_1) &= h\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi_0) - \tilde{p}_s(\xi_0) - h\tilde{f}'(\xi_0), \\ \tilde{p}_s(\xi_2) &= h\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi_1) - \tilde{p}_s(\xi_1) - h\tilde{f}'(\xi_1), \\ &\dots \\ \tilde{p}_s(\xi_{k+1}) &= h\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi_k) - \tilde{p}_s(\xi_k) - h\tilde{f}'(\xi_k) \quad (k = \overline{0, N-1}), \\ &\dots \\ \tilde{p}_s(\xi_{N-1}) &= h\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi_{N-2}) - \tilde{p}_s(\xi_{N-2}) - h\tilde{f}'(\xi_{N-2}), \\ \tilde{p}_s(\xi_N) &= h\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi_{N-1}) - \tilde{p}_s(\xi_{N-1}) - h\tilde{f}'(\xi_{N-1}),\end{aligned}$$

і виражаємо всі $\tilde{p}_s(\xi_k)$ ($k = \overline{1, N}$) через $\tilde{p}_s(\xi_0)$.

Значення функції тиску в кожній точці розбиття виражається через одну невідому величину $\tilde{p}_s(\xi_N)$ або $\tilde{p}_s(\xi_0)$ залежно від вибору лівих чи правих скінченних різниць. У кожному випадку невідому шукаємо з умови рівноваги, у ній інтеграл обчислюємо методом трапецій із використанням знайдених вище $\tilde{p}_s(\xi_k)$. Рівняння рівноваги в обох випадках набуває вигляду

$$\tilde{P} = \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k-1}) + \tilde{p}_s(\xi_k)}{2} h.$$

Воно визначає нелінійне алгебраїчне рівняння відносно зазначених невідомих. Розв'язуємо його методом половинного ділення.

У підсумку отримаємо значення функції тиску в точках розбиття $\xi_k, k = \overline{0, N}$ відрізка $[-1; 1]$.

Дискретизована функція профілю зношеної поверхні півпростору. Функція профілю визначаємо за формулою (15) у точках $\xi_k, k = \overline{0, N}$, обчислюючи інтеграл із використанням, наприклад, формули лівих прямокутників

$$\tilde{W}_s(\xi_k) = \kappa \sum_{j=k}^{N-1} \tilde{p}_s^\alpha(\xi_j) h.$$

Порівняльний аналіз числових результатів, отриманих різними підходами, проведемо для параметрів $\alpha = 1.4$, $A = 0.05$, $\kappa = 0.1$, $\tilde{P} = 1$. Графіки функцій контактної тиску зображено на рис. 4. Розв'язок, отриманий з вибором $N = 20$ відрізків розбиття з використанням лівих скінченних різниць, зображено штриховою лінією, а правих – штрих-пунктирною; результати, отримані з використанням лівих і правих скінченних різниць, якщо $N = 100$, показано сірою суцільною та точковою лініями відповідно. Відхилення між значеннями, розрахованими, якщо $N = 20$, становить до 2.3 %, а якщо $N = 100$ – до 0.4 %.

Застосування методу послідовних наближень до розв'язувального інтегрального рівняння. Розглянемо систему, що складається з інтегрального рівняння (14) та умови рівноваги (13).

Позначимо $C_0 = \tilde{p}_{s,n}(0)$. Чисельний експеримент попередніх розрахунків підтверджує справедливості нерівності

$$\frac{\tilde{p}_s(\xi) - C_0}{C_0} < 1. \quad (25)$$

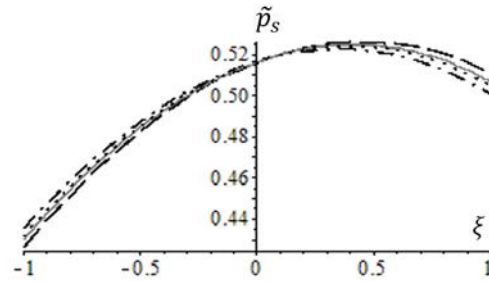


Рис. 4. Порівняння функцій контактної тиску, обчислених із використанням правих і лівих скінченних різниць

Це дає змогу подати функцію $\tilde{p}_s^\alpha(\xi)$ за допомогою ряду

$$(1+u)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \frac{\alpha-j+1}{j} u^k, |u| < 1. \quad (26)$$

Покладемо

$$u(\xi) = \frac{\tilde{p}_{s,n}(\xi) - C_0}{C_0},$$

тоді

$$\tilde{p}_s^\alpha(\xi) = C_0^\alpha \left(1 + \frac{\tilde{p}_s(\xi) - C_0}{C_0} \right)^\alpha = C_0^\alpha \left(1 + \sum_{k=1}^N \prod_{j=1}^k \frac{\alpha-j+1}{j} u^k(\xi) \right).$$

Крім того, функцію $\tilde{f}(\xi)$ подаємо рядом, який наближено замінюємо многочленом $M_m(\xi)$ такого степеня m , щоб $|M(\xi) - \tilde{f}(\xi)| < 10^{-6}$ для всіх $\xi \in [-1; 1]$. Таке подання функцій дає змогу позбутися від нецілих степенів, спростити інтегрування. У підсумку послідовні наближення (22) набувають вигляду

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{s,n+1}(\xi) &= -\kappa \int_{\xi}^1 C_0^\alpha \left(1 + \sum_{k=1}^N \prod_{j=1}^k \frac{\alpha-j+1}{j} u^k(\xi') \right) d\xi' + \tilde{D} - M_m(\xi), \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \quad \tilde{p}_{s,1}(\xi) = \tilde{D},\end{aligned}$$

а розв'язком стає поліноміальна функція, що містить невідому $\tilde{D}$.

Зауважимо, що потрібно відслідковувати виконання умови (25) на кожному ітераційному кроці.

Метод половинного ділення розв'язання рівняння рівноваги (13) відносно $\tilde{D}$ реалізовувати мемо одночасно з методом послідовних наближень.

Функцію профілю зношеної поверхні півпростору знаходимо аналогічно до розділу 3.

Для реалізації зазначеного підходу використано систему комп'ютерної алгебри. Символьні обчислення системи призводять до того, що послідовні наближення суттєво накопичують аналітичні функції степеневих вигляду, переважуючи ресурс системи. Саме за цієї причини вибираємо $N = 5$, а також обчислюємо п'ять послідовних наближень. Не для всіх параметрів κ вибрана кількість послідовних наближень забезпечує збіжність ітераційного процесу. Далі наведемо числовий результат для $\kappa = 0.1$, для якого

порядок збіжності становить $\kappa^N \alpha^N \frac{2^N}{N!}$. Інші параметри – $\alpha = 1.4$, $A = 0.05$, $\tilde{P} = 1$.

Наведені на рис. 5 графіки функції тиску дають змогу порівняти результати, знайдені різними підходами. А саме:

– точковим лініям відповідають графіки функцій-розв'язків диференціального рівняння, до якого застосовано методи лівих і правих скінченних різниць відповідно за вибору 100 відрізків розбиття;

– суцільною сірою – розв'язок інтегрального рівняння, отриманий методом послідовних наближень.

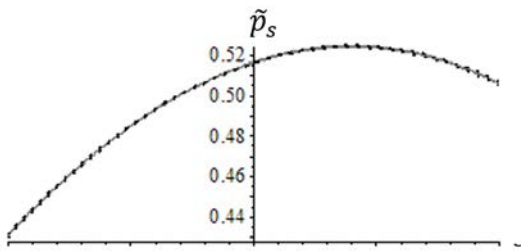


Рис. 5. Порівняння функцій тиску, обчислених із використанням скінченних різниць і методу послідовних наближень

Відхилення між результатами, отриманими за першим і другим підходами, не перевищує 0.25 %.

Застосування методу степеневих рядів до розв'язувального інтегрального рівняння. Розв'язок інтегрального рівняння (14) подаємо степеневим рядом

$$\tilde{p}_s(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_j \xi^j + \dots, \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (27)$$

Здійснено перетворення

$$\tilde{p}_s(\xi) = a_0 (1 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \dots + b_j \xi^j + \dots),$$

де $b_j = \frac{a_j}{a_0}$, $j = 1, 2, 3, \dots$. У розкладі (26) покладемо

$$u = b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \dots + b_j \xi^j + \dots,$$

отримаємо

$$\tilde{p}_s^{\alpha}(\xi) = a_0^{\alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \frac{\alpha - j + 1}{j} (b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \dots + b_j \xi^j + \dots)^k \right).$$

Реалізуємо групування доданків за відповідними степенями ξ і виявляємо закономірність:

$$\tilde{p}_s^{\alpha}(\xi) = a_0^{\alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \xi^k \right), \quad (28)$$

де

$$m, k = \prod_{j=1}^{k-m+1} \frac{\alpha - j + 1}{j}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, \dots, k;$$

$$a_{k,k} = b_k, a_{k,m} = \sum_{j=1}^m a_{k-j, m-j+1} b_j, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$\gamma_k = \sum_{m=1}^k m, k a_{k,m}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Подамо розклад у ряд функції $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k.$$

Підставимо (27) та (28) до рівняння (14), виконавши інтегрування

$$\kappa a_0^{\alpha} \left(\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k+1} \right) - \left(\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{\xi^{k+1}}{k+1} \right) \right) + a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi^k \right) = \tilde{D} - c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^k.$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових степенів ξ , приходимо до системи

$$\kappa a_0^{\alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k+1} \right) + a_0 = \tilde{D} - c_0;$$

$$-\kappa a_0^{\alpha} + a_0 b_1 = -c_1;$$

$$-\kappa a_0^{\alpha} \frac{\gamma_1}{2} + a_0 b_2 = -c_2;$$

...

$$-\kappa a_0^{\alpha} \frac{\gamma_{k-1}}{k} + a_0 b_k = -c_k \quad (k = 3, 4, 5, \dots).$$

Звідки спочатку виразимо коефіцієнти $\{b_k\}$

$$b_1 = \kappa a_0^{\alpha-1} - \frac{c_1}{a_0};$$

$$b_2 = \kappa a_0^{\alpha-1} \frac{\gamma_1}{2} - \frac{c_2}{a_0};$$

...

$$b_k = \kappa a_0^{\alpha-1} \frac{\gamma_{k-1}}{k} - \frac{c_k}{a_0} \quad (k = 3, 4, 5, \dots),$$

після чого отримаємо формулу для обчислення $\tilde{D}$

$$\tilde{D} = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Підставимо розклад (28) до умови рівноваги, прийдемо до рівняння

$$\tilde{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2a_{2k}}{2k+1}. \quad (29)$$

Зауважимо, що кожен коефіцієнт a_k нелінійно залежить від a_0 , тому рівняння (29) визначає нелінійне алгебраїчне рівняння відносно a_0 , до розв'язання якого застосовуємо метод половинного ділення.

Оскільки функція $\tilde{p}_s^{\alpha}(\xi)$ подається степеневим рядом (28), то функція профілю зношеної поверхні, визначена формулою (15), також подається степеневим рядом

$$\tilde{W}_s(\xi) = \kappa a_0^{\alpha} \left(\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k+1} \right) - \left(\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{\xi^{k+1}}{k+1} \right) \right).$$

Для отримання наближеного розв'язку часткова сума степеневого ряду (28) замінюється сумою з 40 доданків, відповідно до цього всі ряди описаного підходу замінюються частковими сумами. Якщо було вибрано 100 доданків суми, результати відрізнялися на шостій значущій цифрі.

Вибираємо ті самі вхідні данні, що і в усьому розділі 4, для порівняння результатів. На рис. 6, а зображено графіки функцій тиску. Точковим лініям відповідають результати, отримані з використанням лівих і правих скінченних різниць (за

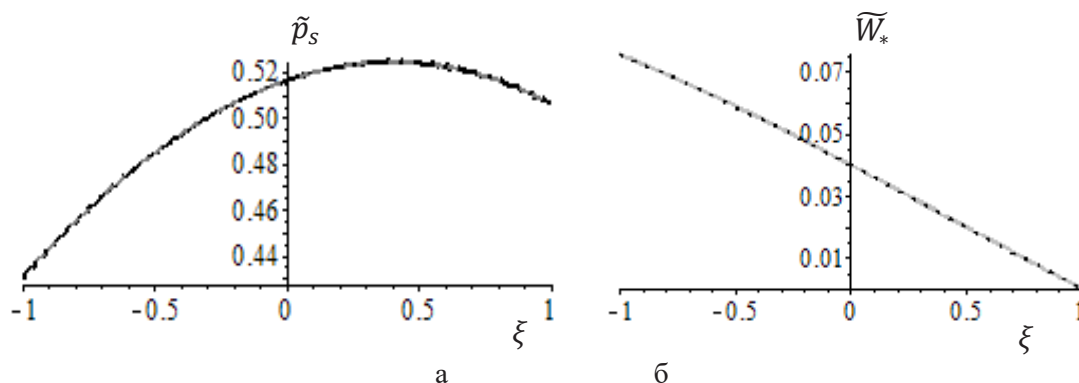


Рис. 6. Порівняння зносоконтактних характеристик, отриманих за різними підходами

кількості відрізків розбиття – 100), штрих-пунктирний – методу послідовних наближень, суцільний сірий – методу степеневих рядів, застосовані до тих розв’язувальних рівнянь, яким вони відповідають. Для вибраних вхідних параметрів графіки функцій профілів зношеної поверхні, зображені на рис. 6, б, візуально близькі.

5. Аналіз числових результатів для різних вхідних параметрів

Наведені нижче результати розраховані, якщо $\bar{P} = 1$. Для дослідження степеневому закону вибирається $\alpha = 1.4$, лінійного – $\alpha = 1$. На всіх поданих нижче рисунках з позначкою «а» наведено графіки функцій контактного тиску, з позначкою «б» – профілів зношеної поверхні, а значення параметра κ підписано поруч із графіками, що йому відповідають.

Результати, наведені для лінійного закону, знайдено за допомогою відомих формули (16), (17) та (15).

Випадок штамп з неплоскою основою, визначеного квадратичною функцією. Розглянемо задачу про зношування півпростору прямокутним у плані штампом, що рухається вздовж осі абсцис і має підшову, визначену невід’ємною функцією $\tilde{f}(\xi) = A\xi^2 + \text{const}$. Наведені вище висновки свідчать про незначні відхилення в результатах, отриманих різними методами. Додатковий аналіз показав, що для підшови штамп, що визначається квадратичною функцією, найбільше відхилення не перевищують 1 %. Значення, розраховані за допомогою методу степеневих рядів, є «усередненими», отриманими іншими методами, саме тому для наведених нижче розрахунків віддано перевагу зазначеному методу.

Проведемо аналіз впливу закону зношування. Беремо $A = 0.05$. На рис. 7 штрих-пунктирним лініям відповідає лінійний закон зношування, суцільним – степеневий. Нелінійний закон зношування впливає на урівномірнення контактного тиску та зменшення зношування півпростору під штампом. Той самий висновок дасть і аналіз рис. 4 для штамп з плоскою підшовою.

За результатами, наведеними на рис. 7, проведемо аналіз впливу параметра κ на зносоконтактні характеристики. Зазначимо, що цей параметр визначає фізичні характеристики півпростору, оскільки виражається через його пружні параметри та коефіцієнт зношування. Зменшення значення параметра κ призводить до зменшення тиску в точці початкового контакту ($\xi = 1$) та збільшення – у кінцевій ($\xi = -1$), а також до зменшення зношення. До аналогічних висновків призводить аналіз зносоконтактних характеристик під штампом із плоскою підшовою (рис. 3).

Проведемо аналіз впливу коефіцієнта A , що визначає функцію поверхні підшови штамп. На рис. 8 значенню $A = 0$ відповідають сірі суцільні лінії, $A = 0.05$ – чорні суцільні, $A = 0.25$ – чорні штрихові.

Оскільки параметр κ відповідає за фізичні властивості півпростору, то півпростір чинитиме найменший «супротив» контактному тиску, якщо $\kappa = 0.1$. Саме тому за цього значення κ можна спостерігати найбільш виражений вплив коефіцієнта A . Якщо для штамп з плоскою підшовою (див. рис. 4) найбільший тиск досягається в точці $\xi = 1$, то для штамп з підшовою, заданою квадратичною функцією, найбільше значення тиску може досягатися у внутрішній точці площадки контакту. За значення $\kappa = 1$ вплив коефіцієнта A стає меншим, а найбільше значення функції тиску спостерігається в точці $\xi = 1$ для всіх A , вибраних для розрахунку. Крім того, коефіцієнт A впливає на напрям опуклості функції тиску. Щодо профілів зношених поверхонь, то параметр A несуттєво впливає на їх якісну поведінку.

З використанням інтегрального рівняння (14) можна отримати осадку штамп $\tilde{D}$. Для невід’ємних функцій $\tilde{f}(\xi) = A\xi^2 + \text{const}$, що визначають форму підшови штамп, припустимо, що значення константи не залежить від A . Занесемо значення $\tilde{D}$ до табл. 2 для різних вхідних параметрів.

Аналізуючи виписані числові результати, доходимо висновку, що степеневий закон зношування

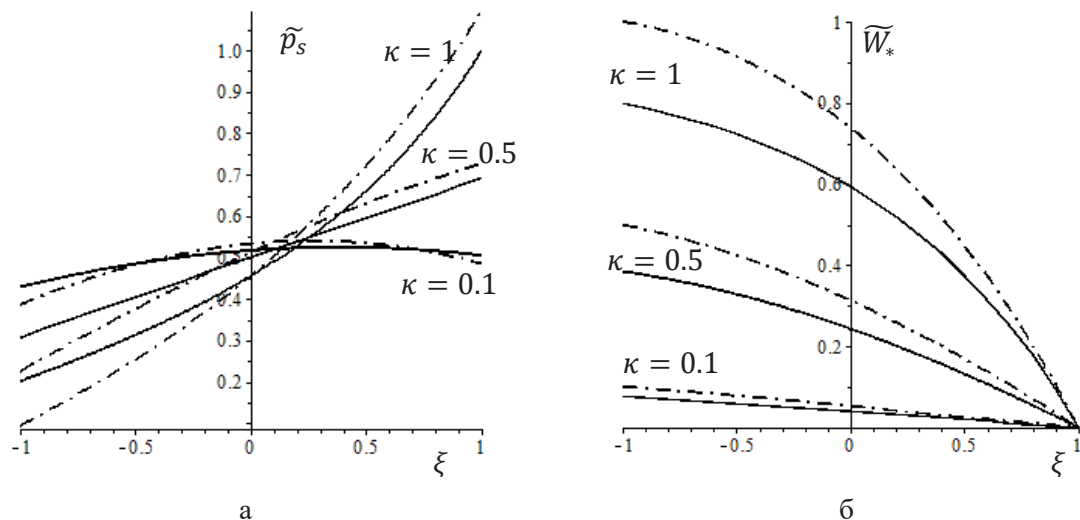


Рис. 7. Зносоконтактні характеристики під штампом, підшва якого визначена квадратичною функцією, для лінійного та степеневих законів зношування та різних κ

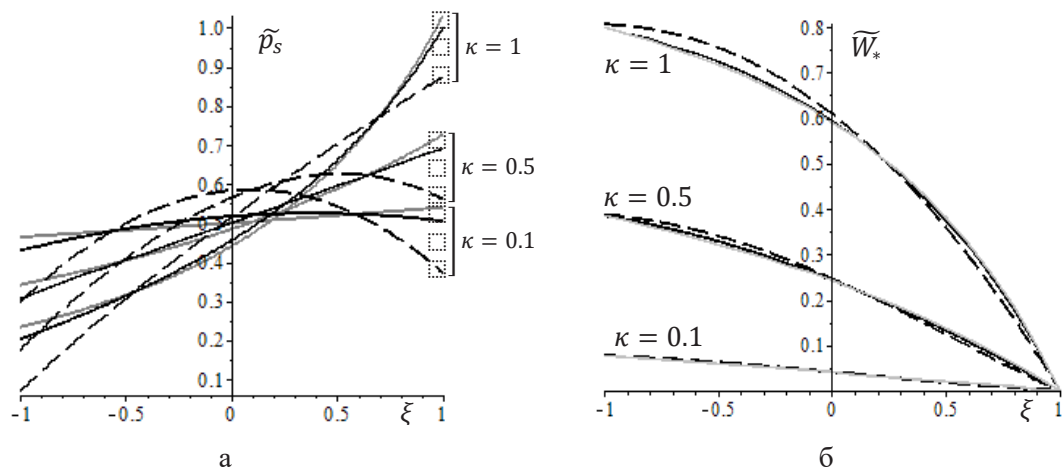


Рис. 8. Зносоконтактні характеристики, отримані для різних параметрів A і κ

впливає на зменшення осадки. Якщо коефіцієнт A фіксований, то більшим значенням параметра κ відповідає більша осадка штамп в пружний півпростір. Так само й більші значення A (за фіксованих κ) визначають більшу осадку штамп.

Випадки штампів з неплоскими підшвами інших типів. Розглянемо спочатку функції

$$\tilde{f}_1(\xi) = A(\xi^4 - \xi^2) + \text{const}$$

та

$$\tilde{f}_2(\xi) = -A \sin(\pi\xi) + \text{const}.$$

Перша має три локальні екстремуми, друга – два.

Із застосуванням методу послідовних наближень розклад функції $f_2(x)$ в степеневий ряд застосовано до 17 степеня включно, у методі степеневих рядів – 39. Для обох випадків в методі скінченних різниць вибрано 100 відрізків розбиття проміжку

Таблиця 2
Безрозмірна осадка штамп $\bar{D}$

	$\kappa = 0.1$	$\kappa = 0.5$	$\kappa = 1$
$\alpha = 1$			
$A = 0.$	0.5516665000	0.7909884384	1.156516960
$A = 0.05$	0.5683539986	0.8081973736	1.175215071
$A = 0.25$	0.6351096838	0.8770359424	1.249998186
$\alpha = 1.4$			
$A = 0$	0.5392540609	0.7253633691	1.030615275
$A = 0.05$	0.5559398642	0.7423833002	1.048729699
$A = 0.25$	0.6228801241	0.8114012421	1.123213126

інтегрування, у методі степеневих рядів функцію тиску подаємо рядом до 40-го степеня включно. Відхилення в розрахункових значеннях, отриманих різними підходами, не перевищувало 1 %.

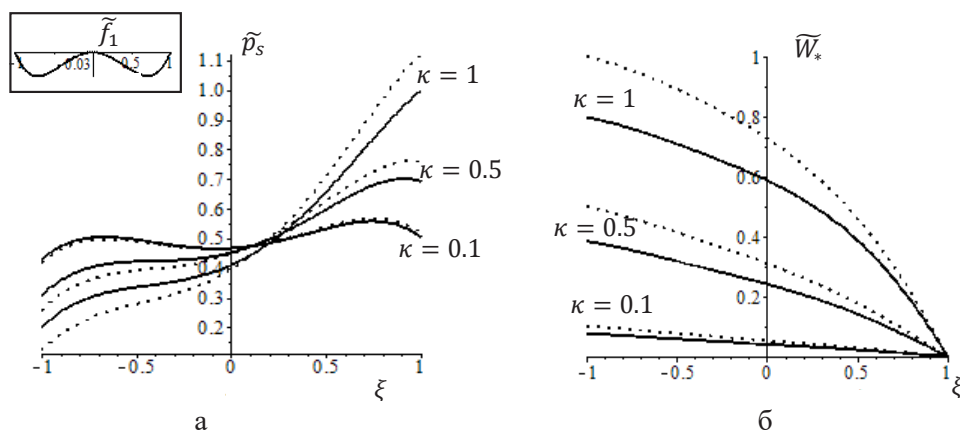


Рис. 9. Зносоконтактні характеристики для неплоского штампа, визначеного функцією $f_1(x)$

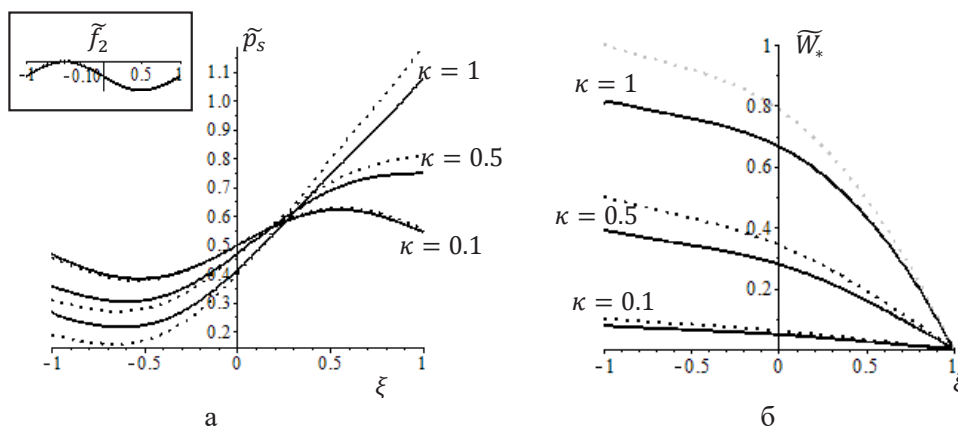


Рис. 10. Зносоконтактні характеристики для неплоского штампа, визначеного функцією $f_2(x)$

Наведені результати відповідають розрахункам із використанням методу степеневих рядів. На рис. 9 і 10 наведено графіки контактних характеристик усталеного зносу півпростору внаслідок руху штампа, визначеного функціями $\tilde{f}_1(\xi)$, якщо $A = 0.25$ та $\tilde{f}_2(\xi)$, якщо $A = 0.1$ відповідно. Суцільним лініям відповідає степеневий закон зношування, а точковим – лінійний.

Вплив вхідних параметрів на контактні характеристики якісно аналогічний зазначеному вище для штампа з квадратичною функції підосви. Особливість полягає у згладжуванні графіка функції тиску на проміжку $\xi \in [0.3; 1]$ за збільшення параметра κ , що визначає фізичні властивості півпростору.

Зауважимо що наближено-аналітичний підхід, який використовує метод степеневих рядів, є неефективним для осцилюючих функцій підосви штампа. Це спричинено збільшенням значень перших коефіцієнтів розкладу в ряд. У таких випадках можна застосувати чисельний підхід, заснований на методі скінченних різниць.

На рис. 11 наведено графіки функцій тиску для неплоского штампа, визначеного функцією

$$\tilde{f}_3(\xi) = A \cos(6\pi\xi) + \text{const},$$

якщо $A = 0.02$. У цьому випадку також спостерігається згладжування функції тиску з наближенням до точки $\xi = 1$.

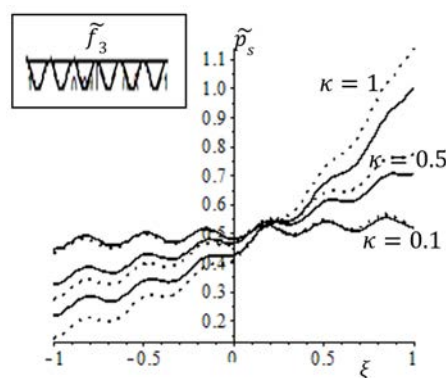


Рис. 11. Зносоконтактний тиск під штампом, визначеним осцилюючою функцією

Висновки. Робота присвячена задачі про зношення основи вінклерівського типу внаслідок руху прямокутного в плані штампа.

Для випадку лінійного закону зношування формули для отримання розв'язку наведено в [9]. Ці формули використано для обчислення контактних характеристик для різних форм неплоских штампів із метою виявлення впливу закону зношування на контактні характеристики.

Найбільша увага в роботі приділяється степеневому закону зношування.

Розв'язувальні рівняння задачі можуть бути подані як диференціальне або еквівалентне йому інтегральне рівняння. Саме дослідженню методів їх розв'язання приділено значну увагу в роботі.

Нелінійне інтегральне рівняння досліджено на існування єдиного розв'язку. Це дало змогу отримати висновок про єдиність розв'язку задачі, який не залежить від застосованих методів.

Нелінійне диференціальне рівняння першого порядку для штампа з плоскою підшоною розв'язано аналітично. Для пошуку невідомої константи використано умову рівноваги, де реалізовано два способи інтегрування – аналітичний і чисельний. В обох випадках рівняння зведено до нелінійного алгебраїчного, яке розв'язано методом половин-

ного ділення.

У випадку штампа з неплоскою підшоною нелінійне диференціальне рівняння розв'язано чисельно методом скінчених різниць, що використовують праві або ліві різниці відношення. До розв'язання відповідного інтегрального рівняння застосовано два підходи: один – заснований на методі послідовних наближень, другий – на наближено аналітичному методі степеневих рядів.

У кожному випадку шукана дискретизована або аналітична (поліноміальна) функція тиску виражається через невідомий параметр. Підстановка такої функції до умови рівноваги зводить її до нелінійного алгебраїчного рівняння, яке розв'язано методом половинного ділення.

Проведено порівняння результатів, отриманих за різними підходами до вибору комбінації методів.

В аналізі числових результатів акцентовано увагу на штампи з неплоскими підшовами різної форми – поліноміальної та тригонометричної. Проведено аналіз зносоконтактних характеристик – функції тиску, профілю зношеної поверхні й осадки штампа – щодо впливу вхідних параметрів. Зокрема, виявлено, що степеневий закон зношування призводить до урівномірення контактного тиску та зменшення зносу поверхні півпростору.

ЛІТЕРАТУРА

1. Д'яченко Н. М., Дмитрів К. М. Вплив закону деформування покриття на характеристики осесиметричної контактної задачі на різних стадіях зношування. *Прикладна механіка*. 2024. Т. 60. № 2. С. 19–31.
2. Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь : колективна монографія / за заг. ред. Р. М. Мартиняка. Львів : Видавець Вікторія Кундельська, 2022. 392 с. URL: <https://www.researchgate.net/publication/366177313>.
3. Онишкевич В. М., Сулим Г. Т. Урахування зношування при плоскому контакті прямокутного штампа з пружною півплощиною. *Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки*. 2019. № 1. С. 138–141. URL: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.31>.
4. Сачук Ю. В., Максимук О. В., Саланда І. П. Аналітико-числове обчислення ітераційними методами областей контакту для задачі про зношування пружної півплощини канонічними штампами. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фіз.-мат. науки*. 2019. Вип. 20. С. 70–78. URL: <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2019-20.70-78>.
5. Archard J.F. Contact and ruing of flat surfaces. *Appl. Phys.* 1953. No. 24. P. 981–988.
6. Argatov I. From Winkler's foundation to Popov's foundation. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 17. Iss. 2. P. 181–190. URL: <http://dx.doi.org/10.22190/FUME190330024A>.
7. Galin L.A. Contact Problems: The legacy of L.A. Galin / Ed. G.M.L. Gladwell. *Solid Mechanics and Its Applications*. 2008. Vol. 155. 332 p.
8. Garcin S., Baydoun S., Arnaud P., Fouvry S. Fretting wear modeling of 3D and 2D Hertzian contacts with a third-body layer using a Winkler elastic foundation model. *Tribology International*. 2022. Vol. 170. Id: 107493. URL: <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2022.107493>.
9. Goryacheva I.G. Contact Mechanics in Tribology / Part of the book series: *Solid Mechanics and Its Applications* (SMIA, volume 61): Series Editor: G.M.L. Gladwell. Springer Science & Business Media, 1998. 346 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9048-8>.
10. Han D., Han W., Jureczka M., Ochal A. Numerical analysis of a contact problem with wear. *Computers & Mathematics with Applications*. Elsevier, 2020. Vol. 79. P. 2942–2951. URL: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.12.027>.

11. Hu J., Gao F., Liu X., Wei Y. An elasto-plastic contact model for conformal contacts between cylinders. *Proceedings of the Institution of mechanical engineers: Part J – Journal of engineering tribology*. 2020. Vol. 234. Iss. 12. P. 1837–1845. URL: <https://doi.org/10.1177/1350650119896461>.
12. Kozachok O.P. Local Friction Wear of an Elastic Half Space with Protrusion. *Mater Sci*. 2022. Vol. 57. P. 797–804. <https://doi.org/10.1007/s11003-022-00611-z>.
13. Lee C.Y., Tian L.S., Bae J.W., Chai Y.S. Application of influence function method on the fretting wear of tube-to-plate contact. *Tribology International*. 2009. Vol. 42. Iss. 6. P. 951–957. URL: <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2009.01.005>.
14. Menga N., Ciavarella M.A. Winkler solution for the axisymmetric Hertzian contact problem with wear and finite element method comparison. *J. Strain Analysis*. 2015. Vol. 50. No. 3. P. 156–162. URL: <http://dx.doi.org/10.1177/0309324714567489>.
15. Páczelt I., Mróz Z. On the analysis of steady-state sliding wear processes. *Tribology International*. 2009. Vol. 42. Iss. 2. P. 275–283. URL: <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2008.06.007>.
16. Pödra P., Andersson S. Wear simulation with the Winkler surface model. *Wear*. 1997. Vol. 207. Iss. 1–2. P. 79–85. URL: [https://doi.org/10.1016/S0043-1648\(96\)07468-6](https://doi.org/10.1016/S0043-1648(96)07468-6).
17. Xuan H., Cheng X. Numerical Analysis and Simulation of a Frictional Contact Problem with Wear, Damage and Long Memory. *East Asian Journal on Applied Mathematics*. 2020. Vol. 10. No. 4. P. 659–678. URL: <https://doi.org/10.4208/eajam.130320.260520>.
18. Zhan W., Huang P. Numerical analysis of time-varying wear with elastic deformation in line contact. *Friction*. 2019. Vol. 7. P. 143–152. URL: <https://doi.org/10.1007/s40544-017-0195-1>.
19. Zhang X., Shen H., Liu J., Deng S., Li X., Cai Z., Zhu M. An efficient numerical model for predicting the torsional fretting wear considering real rough surface. *Wear*. 2015. Vol. 344–345. P. 32–45. URL: <https://doi.org/10.1016/j.wear.2015.10.019>.

REFERENCES

1. Dyachenko, N.M., Dmytriv, K.M. (2024). Vplyv zakonu deformuvannia pokryttia na kharakterystyky osesymetrychnoi kontaktnoi zadachi na riznykh stadiiakh znoshuvannia [Effect of Deformation of Coating on Characteristics of Axisymmetric Contact Problem on Different Stages of Wear]. *Prykladna mekhanika*, 60 (2), 19–31 [in Ukrainian].
2. Martynyak, R.M. (Ed.) (2022). Contact mechanics. Kontaktna mekhanika. Shorstkist, rozsharuvannia i znoshuvannia poverkhon: kolektyvna monohrafiia [Roughness, delamination and wear of surfaces: collective monograph]. Lviv, publusher Victoria Kundelska. <https://www.researchgate.net/publication/366177313> [in Ukrainian].
3. Onyshkevych, V.M., Sulym, G.T. (2019). Urakhuvannia znoshuvannia pry ploskomu kontakti priamokutnoho shtampa z pruzhnoi pivploshchynoi [Consideration of wear in plane contact of rectangular punch and elastic half-plane]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*, 1, 138–141. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.31> [in Ukrainian].
4. Sachuk, Yu.V., Maksimuk, O.V., Salanda, I.P. (2019). Analitiko-chyslove obchyslennia iteratsiinymy metodamy oblasteri kontaktu dlia zadachi pro znoshuvannia pruzhnoi pivploshchyny kanonichnymy shtampamy [Analytical and numerical calculations by iteration method for contact area for the problem of wearing the elastic area by canonical stamps]. *Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences*, 20, 70–78. <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2019-20.70-78> [in Ukrainian].
5. Archard, J.F. (1953). Contact and ruing of flat surfaces. *Appl. Phys.*, 24, 981–988.
6. Argatov, I. (2019). From Winkler's foundation to Popov's foundation. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*, 17 (2), 181–190. <http://dx.doi.org/10.22190/FUME190330024A>.
7. Galin, L.A. (2008). Contact Problems: The legacy of L.A. Galin. Ed. G.M.L. Gladwell. *Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 155.
8. Garcin, S., Baydoun, S., Arnaud, P., Fouvry, S. (2022). Fretting wear modeling of 3D and 2D Hertzian contacts with a third-body layer using a Winkler elastic foundation model. *Tribology International*, 170, id: 107493. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2022.107493>.

9. Goryacheva, I.G. (1998). Contact Mechanics In Tribology / Part of the book series: *Solid Mechanics and Its Applications* (SMIA, volume 61): Series Editor: G.M.L. Gladwell. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9048-8>.
10. Han, D., Han, W., Jureczka, M., Ochal, A. (2020). Numerical analysis of a contact problem with wear. *Computers & Mathematics with Applications*, 79, 2942–2951. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.12.027>.
11. Hu, J., Gao, F., Liu, X., Wei, Y. (2020). An elasto-plastic contact model for conformal contacts between cylinders. *Proceedings of the Institution of mechanical engineers: Part J – Journal of engineering tribology*, 234 (12), 1837–1845. <https://doi.org/10.1177/1350650119896461>.
12. Kozachok, O.P. (2022). Local Friction Wear of an Elastic Half Space with Protrusion. *Mater Sci.*, 57, 797–804. <https://doi.org/10.1007/s11003-022-00611-z>.
13. Lee, C.Y., Tian, L.S., Bae, J.W., Chai, Y.S. (2009). Application of influence function method on the fretting wear of tube-to-plate contact. *Tribology International*, 42 (6) 951–957. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2009.01.005>.
14. Menga, N., Ciavarella, M.A. (2015). Winkler solution for the axisymmetric Hertzian contact problem with wear and finite element method comparison. *J. Strain Analysis*, 50, 3, 156–162. <http://dx.doi.org/10.1177/0309324714567489>.
15. Páczelt, I., Mróz, Z. (2009). On the analysis of steady-state sliding wear processes. *Tribology International*, 42 (2), 275–283. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2008.06.007>.
16. Pödra, P., Andersson, S. (1997). Wear simulation with the Winkler surface model. *Wear*, 207 (1–2), 79–85. [https://doi.org/10.1016/S0043-1648\(96\)07468-6](https://doi.org/10.1016/S0043-1648(96)07468-6).
17. Xuan, H., Cheng, X. (2020). Numerical Analysis and Simulation of a Frictional Contact Problem with Wear, Damage and Long Memory. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, 10 (4), 659–678. <https://doi.org/10.4208/eajam.130320.260520>.
18. Zhan, W., Huang, P. (2019). Numerical analysis of time-varying wear with elastic deformation in line contact. *Friction*, 7, 143–152. <https://doi.org/10.1007/s40544-017-0195-1>.
19. Zhang, X., Shen, H., Liu, J., Deng, S., Li, X., Cai, Z., Zhu, M. (2015). An efficient numerical model for predicting the torsional fretting wear considering real rough surface. *Wear*. 344–345, 32–45. URL: <https://doi.org/10.1016/j.wear.2015.10.019>.