

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-05>

ЗАДАЧА ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРИШАРОВИХ СУЦІЛЬНИХ ЦИЛІНДРІВ ІЗ НЕПЕРЕРВНО-НЕОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ЗА РІЗНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ТОРЦЯХ

Рожок Л. С.

*доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри теоретичної та прикладної механіки
Національний транспортний університет
вул. Омеляновича-Павленка, 1, Київ, Україна
orcid.org/0000-0002-7926-9074
teor_mex@ukr.net*

Крук Л. А.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки
Національний транспортний університет
вул. Омеляновича-Павленка, 1, Київ, Україна
orcid.org/0000-0002-8131-564X
krukles@ukr.net*

Ісаєнко Г. Л.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
заступник завідувача кафедри математики та фізики
Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації ім. Героїв Крут
вул. Князів Острозьких, 45/1, Київ, Україна
orcid.org/0000-0003-0479-9596
gl_isayenko@ukr.net*

Ключові слова:

*вісесиметрична задача,
модуль пружності,
неперервно-неоднорідний
матеріал, сплайн-
апроксимація, шаруваті
циліндри.*

У статті розглядається вісесиметрична задача лінійної теорії пружності про напружений стан тришарових суцільних циліндрів із неперервно-неоднорідним заповнювачем, що перебувають під дією рівномірного нормального навантаження бічної поверхні за двох способів закріплення торців: шарнірного опирання та жорсткого закріплення. Задачу розв'язано на основі чисельно-аналітичного підходу, що базується на використанні методу сплайн-апроксимації розв'язку в напрямку поздовжньої координати, унаслідок чого вихідна двовимірна крайова задача для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних зводиться до одновимірної крайової задачі, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок якої знаходиться стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. При цьому розкривається невизначеність деяких множників розв'язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь у геометрично особливій точці ($r = 0$). Розглядаються тришарові циліндри з ізотропними несучими шарами, що мають різні механічні характеристики, для матеріалу заповнювача вибрано неперервно-неоднорідний за радіальною координатою матеріал, модуль пружності якого змінюється за квадратичним та лінійним законами, а коефіцієнт Пуассона дорівнює середньому арифметичному відповідних коефіцієнтів суміжних шарів. Шари з'єднані між собою без проковзування і відриву, при цьому на границях шарів заповнювач має

модуль пружності, що дорівнює модулю пружності суміжного шару. Достовірність і точність результатів забезпечується порівнянням розв'язку, отриманого на основі методу сплайн-апроксимації з точним розв'язком задачі у випадку шарнірного закріплення торців і варіацією кількості сплайн-функцій. Отримано розв'язки у вигляді графіків розподілу полів колових і поздовжніх напружень вздовж радіальної координати циліндра. Встановлено залежності характеристик напруженого стану розглядуваних циліндрів від закону зміни модуля пружності заповнювача, товщини середнього шару та способу закріплення торців.

STRESS STATE PROBLEM OF THREE-LAYERED SOLID CYLINDERS WITH CONTINUOUSLY NONHOMOGENEOUS FILLER UNDER DIFFERENT END BOUNDARY CONDITIONS

Rozhok L. S.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor at the Department of Theoretical and Applied Mechanics
National Transport University
Omelianovycha-Pavlenka str., 1, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-7926-9074
teor_mex@ukr.net*

Kruk L. A.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Theoretical and Applied Mechanics
National Transport University
Omelianovycha-Pavlenka str., 1, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-8131-564X
krukles@ukr.net*

Isaienko H. L.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Deputy Head of the Department of Mathematics and Physics
Heroes of Kruty Military Institute of Telecommunications and Information Technologies
Knyaziv Ostrozkykh str., 45/1, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0003-0479-9596
gl_isayenko@ukr.net*

Key words: *axisymmetric problem, elastic modulus, continuously nonhomogeneous material, spline approximation, layered cylinders.*

The article examines the axisymmetric problem of the linear theory of elasticity concerning the stress state of three-layered solid cylinders with a continuously nonhomogeneous filler subjected to uniform normal loading on the lateral surface under two types of end constraints: simply supported and rigidly clamped. The problem is considered for two types of end constraints: simply supported and rigidly clamped. The solution is obtained using a numerical-analytical approach based on spline approximation of the solution along the longitudinal coordinate. This approach reduces the original two-dimensional boundary value problem for a system of partial differential equations to a one-dimensional boundary value problem described by a system of ordinary differential equations, which is solved using a stable numerical method of discrete orthogonalization. Additionally, the method addresses the indeterminacy of certain factors in the system of ordinary differential equations at the geometrically singular point ($r = 0$).

The study considers three-layered cylinders with isotropic load-bearing layers that have different mechanical properties. The filler material is assumed to be continuously nonhomogeneous along the radial coordinate, with its elastic

modulus varying according to quadratic and linear laws. The Poisson's ratio of the filler is taken as the arithmetic mean of the corresponding Poisson's ratios of the adjacent layers. The layers are assumed to be perfectly bonded without slipping or separation, and at the interfaces, the filler's elastic modulus matches that of the adjacent layer. The accuracy and reliability of the results are verified by comparing the spline-approximation-based solution with the exact solution for the case of simply supported ends and by varying the number of spline functions. The obtained solutions are presented in the form of graphical distributions of circumferential and longitudinal stress fields along the cylinder radial coordinate. The study establishes the dependencies of the stress state characteristics on the variation of the filler's elastic modulus, the thickness of the middle layer, and the type of end constraints.

Вступ. Виготовленню нового конструктивного елемента передую створення відповідної математичної моделі для проведення необхідних чисельних експериментів із метою знаходження для нього оптимальних геометричних і механічних параметрів. Одним із різновидів математичних моделей є порожнисті та суцільні циліндри, які дають змогу перевірити можливу поведінку новостворених матеріалів у різноманітних умовах експлуатації. При цьому важливу роль відіграють вибрані для проведення таких експериментів методи та підходи.

У роботі [1] побудовано розв'язок квазістатичної задачі термпружності для довгого багат шарового порожнистого циліндра у вигляді суперпозиції залежностей, кожна з яких описує напружений стан, зумовлений відповідним тепловим або силовим чинником, та проілюстровано його застосування до визначення термонапруженого стану для різних законів зміни температур довкілля та теплових потоків.

Метод скінчених елементів, що охоплює метод колокації із септичними В-сплайнами як базисними функціями для розв'язання крайових задач, застосовується в роботі [2].

Поведінка циліндричних оболонок за дії різноманітного навантаження, зокрема дії зовнішнього тиску та внутрішнього тиску, наявності масових сил та ін., розглядається в роботі [3]. При цьому досліджується вплив геометричних параметрів розглядуваних оболонок на їх напружено-деформований стан із метою оптимізації цих параметрів під час вибору відповідної форми подібних конструктивних елементів.

Моделюванню напружено-деформованого стану конструкцій, виготовлених із композитних матеріалів, присвячено статті [4, 5]. Механічна поведінка волокнистого композита на основі методу представницького об'ємного елемента розглянута в роботі [4]; на основі модифікованого методу скінчених елементів, а саме моментної схеми скінченого елемента, у роботі [5] досліджується поведінка конструкцій із композиційних матеріалів, що мають дискретні включення.

Вплив пружної неоднорідності на напружений стан суцільного циліндра за умови залежності модуля зсуву від радіальної координати досліджено в роботі [6] з метою надання необхідних

інженерних рекомендацій щодо експлуатації матеріалів, які мають відповідні механічні характеристики.

Розв'язки плоскої вісесиметричної задачі теорії пружності для суцільного кругового циліндра, складеного з концентричних неперервно-неоднорідних за радіальною координатою шарів, за умови їх ідеального контакту за дії рівномірного тиску бічної поверхні, на основі методу безпосереднього інтегрування побудовано в [7].

Плоска вісесиметрична задача лінійної теорії пружності для ізотропного суцільного циліндра за дії рівномірно-розподіленого нормального навантаження за різних способів закріплення торців розв'язується в роботі [8]. Ця робота є продовженням досліджень, пов'язаних із визначенням напруженого стану суцільних циліндрів із використанням методу сплайн-апроксимації функцій та чисельного методу дискретної ортогоналізації, що дає змогу у випадку шаруватих циліндрів отримати для кожного його шару рівняння однакової структури. Сплайн-апроксимація розв'язку дає змогу врахувати різні граничні умови на торцях циліндра, а чисельне інтегрування диференціальних рівнянь уздовж радіальної координати – точно враховувати змінні за цією координатою механічні властивості матеріалів шарів досліджуваних циліндрів. Запропонований у роботі підхід дає можливість одночасно досліджувати вплив на напружений стан шаруватих циліндрів їх геометричних параметрів, механічних характеристик матеріалу, а також спосіб закріплення торців.

Метою дослідження є визначення впливу механічних параметрів заповнювача, товщини середнього шару та способу закріплення торців на характеристики напруженого стану тришарових суцільних циліндрів.

Постановка задачі та метод розв'язування. У циліндричній системі координат r, θ, z (r – полярний радіус, θ – центральний кут у поперечному перерізі, z – поздовжня координата) розглядаються пружні тіла у вигляді тришарових суцільних циліндрів ($0 \leq r_1 \leq r \leq r_2 \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq l$; R – радіус циліндра, l – його довжина), що перебувають під дією рівномірно-розподіленого нормального навантаження ($q_r = q_0 \sin(\pi z / l), q_0 = \text{const}$). При цьому виконуються співвідношення

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta; z = z. \quad (1)$$

Коефіцієнти Ламе в цій системі координат мають вигляд

$$H_1 = 1; H_2 = r; H_3 = 1. \quad (2)$$

Циліндри складені із шарів, що взаємодіють між собою без проковзування та відриву. Нехай у загальному випадку для кожного шару коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга змінюються за радіальною координатою, тобто $E^i = E^i(r)$, $\nu_i = \nu_i(r)$ ($i = 1, 2, 3$).

За вихідні беруться рівняння лінійної теорії пружності для вісесиметричного тіла в циліндричній системі координат, які з урахуванням (1) та (2) для кожного шару мають такий вигляд: співвідношення Коші

$$\varepsilon_r^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}, \varepsilon_\theta^i = \frac{u_r^i}{r}, \varepsilon_z^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}, \varepsilon_{rz}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; \quad (3)$$

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r^i}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} + \frac{\sigma_r^i - \sigma_\theta^i}{r} = 0, \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}^i}{r} = 0; \quad (4)$$

співвідношення узагальненого закону Гука для ізотропного тіла

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^i &= \frac{1}{E^i} [\sigma_r^i - \nu_i(\sigma_\theta^i + \sigma_z^i)], \varepsilon_\theta^i = \frac{1}{E^i} [\sigma_\theta^i - \nu_i(\sigma_r^i + \sigma_z^i)], \\ \varepsilon_z^i &= \frac{1}{E^i} [\sigma_z^i - \nu_i(\sigma_r^i + \sigma_\theta^i)], \varepsilon_{rz}^i = \frac{2(1 + \nu_i)}{E^i} \tau_{rz}^i \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (5)$$

де u_r^i, u_z^i – переміщення в радіальному та поздовжньому напрямку в i -му шарі; $\varepsilon_r^i, \varepsilon_\theta^i, \varepsilon_z^i, \varepsilon_{rz}^i$ – деформації, що виникають в i -му шарі; $\sigma_r^i, \sigma_\theta^i, \sigma_z^i, \tau_{rz}^i$ – напруження у відповідних напрямках в i -му шарі. Додаючи до рівнянь (3) – (5) навантаження на бічній поверхні $r = R$ та граничні умови на торцях $z = 0; l$, дійдемо до двовимірної крайової задачі. При цьому мають виконуватись умови спряження шарів

$$u_r^i = u_r^{i+1}, u_z^i = u_z^{i+1}; \sigma_r^i = \sigma_r^{i+1}, \tau_{rz}^i = \tau_{rz}^{i+1} \quad (i = 1, 2).$$

На торцях циліндра розглядатимемо два види граничних умов:

а) шарнірного опирання

$$\sigma_z^i = 0, u_r^i = 0, \text{ якщо } z = 0; l, \quad (6)$$

які з урахуванням другої умови (6) мають вигляд

$$u_r^i = 0, \partial u_z^i / \partial z = 0, \text{ якщо } z = 0; l; \quad (7)$$

б) жорсткого закріплення

$$u_r^i = 0, u_z^i = 0, \text{ якщо } z = 0; l. \quad (8)$$

Граничні умови на бічній поверхні $r = R$ через прикладене навантаження мають вигляд

$$\sigma_r^R = q_r, \tau_{rz}^R = 0, \text{ якщо } r = R. \quad (9)$$

Виходячи із фізичних міркувань, додамо граничні умови на осі циліндра

$$\tau_{rz}^0 = 0, u_r^0 = 0, \text{ якщо } r = 0. \quad (10)$$

Вибравши за розв'язувальні функції компоненти переміщення u_r^i, u_z^i , після відповідних перетворень отримаємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних для кожного шару ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial r^2} &= -\frac{a_1^i}{a_1^i} \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial z^2} - \frac{a_2^i + a_3^i}{a_1^i} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial r} + \frac{u_r^i}{r^2} - \frac{1}{a_1^i} \frac{\partial a_1^i}{\partial r} \frac{\partial u_r^i}{\partial r} - \frac{1}{a_1^i} \frac{\partial a_2^i}{\partial r} \frac{u_r^i}{r} - \frac{1}{a_1^i} \frac{\partial a_3^i}{\partial r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial r^2} &= -\frac{a_1^i + a_2^i}{a_3^i} \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial r \partial z} - \frac{a_2^i + a_3^i}{a_3^i} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - \frac{a_1^i}{a_3^i} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial r} - \frac{1}{a_3^i} \frac{\partial a_3^i}{\partial r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - \frac{1}{a_3^i} \frac{\partial a_1^i}{\partial r} \frac{\partial u_z^i}{\partial r}, \\ a_1^i &= \frac{E^i(1 - \nu_i)}{1 - \nu_i - 2\nu_i^2}, \quad a_2^i = \frac{E^i \nu_i}{1 - \nu_i - 2\nu_i^2}, \quad a_3^i = \frac{E^i}{2(1 + \nu_i)} \quad (0 \leq r \leq R; 0 \leq z \leq l). \end{aligned} \quad (11)$$

Граничні умови (9), (10) у переміщеннях матимуть вигляд

$$u_r^0 = 0, \frac{\partial u_z^0}{\partial r} = 0, \text{ якщо } r = 0, \quad (12)$$

$$a_1^R \frac{\partial u_r^R}{\partial r} + a_2^R \frac{u_r^R}{r} + a_3^R \frac{\partial u_z^R}{\partial z} = q_r, \frac{\partial u_r^R}{\partial z} + \frac{\partial u_z^R}{\partial r} = 0,$$

якщо $r = R$.

Для зниження розмірності системи диференціальних рівнянь у частинних похідних застосовується підхід, що базується на сплайн-апроксимації розв'язку у напрямку твірної. Для цього подамо розв'язок системи диференціальних рівнянь у частинних похідних (11) у вигляді сплайн-функцій (індекс i в позначеннях номера шарів надалі опустимо)

$$u_r(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{1i}(r) \varphi_{1i}(z), \quad u_z(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(r) \varphi_{2i}(z), \quad (13)$$

де $u_{1i}(r), u_{2i}(r)$ – шукані функції, а $\varphi_{1i}(z), \varphi_{2i}(z)$ – функції, що побудовано за допомогою лінійних комбінацій В-сплайнів третього степеня [8], які дають змогу точно задовольнити граничні умови та торцях циліндра (7), (8).

Після підстановки виразів (13) до системи диференціальних рівнянь (11) потрібно задовольнити їх у точках колокації $z = z_k$ ($k = \overline{0, N}$). При цьому отримуємо систему $2(N + 1)$ звичайних диференціальних рівнянь. Аналогічно чинять із граничними умовами (12) на поверхнях $r = 0; R$.

Таким чином, розв'язувальна система звичайних диференціальних рівнянь зі змінними вздовж координати r коефіцієнтами набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{1i}}{dr^2} \varphi_{1i}(z_k) &= -\frac{a_2}{a_1} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}'(z_k) - \frac{a_2 + a_3}{a_1} \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{r} \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) + \\ &+ \sum_{i=0}^N \frac{1}{r^2} u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dr} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{1}{a_1} \frac{da_2}{dr} \sum_{i=0}^N \frac{u_{1i}}{r} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{1}{a_1} \frac{da_3}{dr} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi_{2i}'(z_k), \\ \sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{2i}}{dr^2} \varphi_{2i}(z_k) &= -\frac{a_2}{a_3} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}'(z_k) - \frac{a_2 + a_3}{a_3} \frac{1}{r} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{a_1}{a_3} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi_{2i}''(z_k) - \\ &- \frac{1}{r} \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) - \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dr} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}'(z_k) - \frac{1}{a_3} \frac{da_2}{dr} \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) \quad (k = \overline{0, N+1}); \end{aligned} \quad (14)$$

з граничними умовами

$$\sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) = 0, \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) = 0, \text{ якщо } r = 0,$$

$$\begin{aligned} a_1 \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) + a_2 \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) + a_3 \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) &= q_r, \\ \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) + \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) &= 0 \end{aligned} \quad \text{якщо } r = R. \quad (15)$$

Отримана система звичайних диференціальних рівнянь (14) має коефіцієнти при деяких членах, які за $r = 0$ утворюють невизначеність $0/0$, для розкриття якої скористаємося граничними переходами, тобто якщо $r \rightarrow 0$, то $u_{1i}/r \rightarrow du_{1i}/dr$ ($i = \overline{0, N}$). Тоді рівняння (14) в точці $r = 0$ набудуть вигляду

$$\sum_{i=1}^N \frac{d^2 u_{1i}}{dr^2} \varphi_{1i}(z_k) = -\frac{2}{a_1} \frac{da_1}{dr} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{1}{a_1} \frac{da_2}{dr} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi'_{2i}(z_k),$$

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{2i}}{dr^2} \varphi_{2i}(z_k) = -\frac{a_1}{2a_3} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi''_{2i}(z_k) - \frac{a_2 + a_3}{a_3} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi'_{1i}(z_k). \quad (16)$$

Додаючи до систем рівнянь (14), (16) граничні умови (15), доходимо до крайової задачі, яку можна розв'язати чисельно. При цьому для $r = 0$, використовується система рівнянь (16), а для усіх інших значень r – система рівнянь (14).

Введемо позначення

$$y_{1i} = u_{1i}, y_{2i} = \frac{du_{2i}}{dr}, y_{3i} = u_{2i}, y_{4i} = \frac{du_{1i}}{dr} \quad (i = \overline{0, N}).$$

Тоді розв'язувальну систему диференціальних рівнянь (14), (16) можна подати у векторному вигляді

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = A(r)\bar{Y} + \bar{f}, \quad (0 \leq r \leq R), \quad (17)$$

тут $\bar{Y} = \{y_{10}, \dots, y_{1N}; y_{20}, \dots, y_{2N}; y_{30}, \dots, y_{3N}; y_{40}, \dots, y_{4N}\}^T$; $A(r)$ – квадратна матриця порядку $4(N+1) \times 4(N+1)$, $\bar{f}$ – вектор правої частини. Граничні умови можна записати аналогічно

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{b}_1, B_2 \bar{Y}(R) = \bar{b}_2, \quad (18)$$

де B_1, B_2 – прямокутні матриці порядку $2(N+1) \times 4(N+1)$.

Розв'язок крайової задачі (17), (18) здійснюється стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Числові результати та їх обговорення. Достовірність і точність отримуваних результатів підтверджено порівнянням розв'язків, отриманих на основі розглянутої методики, та розв'язку, отриманого за шарнірного закріплення торців із використанням методів відокремлення змінних за допомогою розв'язку в ряди Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації, описаного в роботі [8].

На основі запропонованого підходу проведемо дослідження напруженого стану тришарових суцільних циліндрів із неперервно-неоднорідним заповнювачем, що перебувають під дією рівномірно-розподіленого нормального навантаження за двох граничних умов на торцях.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: $R = 6l_0$, $l = 14l_0$; внутрішній шар виготовлений із нержавіючої сталі ($E_1 = 200$ ГПа, $\nu_1 = 0,29$) і має сталу товщину $h_1 = l_0$; середній шар виготовлений із неперервно-неоднорідного матеріалу і має товщину $h_2 = 2l_0; 4l_0$; відповідно, зовнішній шар виготовлений з оксиду алюмінію ($E_3 = 380$ ГПа,

$\nu_3 = 0,25$) і має товщину $h_3 = 3l_0; l_0$. Для середнього шару вибрано матеріал, модуль пружності якого має квадратичну $E_2(r) = ar^2 + br + c$ або лінійну $E_2(r) = dr + e$ ($r_1 \leq r \leq r_2$) залежність від радіальної координати, при цьому коефіцієнт Пуассона дорівнює середньому арифметичному значенню коефіцієнтів сусідніх шарів $\nu_3 = 0,27$. Залежно від товщини середнього шару для відповідних сталих законів зміни модуля Юнга вибрано величини: $a = 20; b = 10; c = 170; d = 90; e = 110$ для товщини $h_2 = 2l_0$ і $a = 5; b = 15; c = 180; d = 45; e = 155$ для товщини $h_2 = 4l_0$.

Результати розв'язання задачі наведено в середньому перерізі довжини циліндра на рис. 1, 2 для розподілу полів радіальних σ_r та колових σ_θ напружень уздовж радіуса циліндра для квадратичного (суцільні лінії) та лінійного (пунктирні лінії) законів зміни модуля пружності та для двох варіантів товщини середнього шару: товщині $h_2 = 2l_0$ відповідають криві (1), товщині $h_2 = 3l_0$ – криві (2).

Величина радіальних напружень, як видно з рис. 1, суттєво не залежить від способу закріплення торців. Відмінність між напруженнями дещо помітна у внутрішньому шарі і становить приблизно 2,5 % поблизу осі циліндра для обох значень товщини середнього шару та законів зміни модуля Юнга. В інтервалі, наближеному до зовнішньої поверхні, радіальні напруження збігаються для обох законів зміни модуля пружності та товщини заповнювача, що пов'язано з необхідністю задовольняння граничних умов на бічній поверхні циліндра.

В інтервалі, близькому до середини циліндра, величина радіальних напружень практично не залежить від закону зміни модуля пружності та товщини середнього шару. Збільшення товщини середнього шару впливає на збільшення величини радіальних напружень на осі циліндра в межах 6,3 %.

На відміну від радіальних (рис. 2), колові напруження більш чутливі до зміни товщини середнього шару та способу закріплення торців. Так, на зовнішній поверхні циліндра величина колових напружень збільшується на 8 % у випадку шарнірного закріплення торців порівняно із жорстким для товщини середнього шару $h_2 = 4l_0$ і на 4,5% – у середині циліндра для товщини $h_2 = 2l_0$. При цьому на осі циліндра відмінність між напруженнями залежно від способу закріплення торців аналогічна радіальним напруженням. Вплив зміни закону модуля пружності так само не суттєвий. Зменшення товщини середнього шару призводить як до кількісної, так і до якісної зміни колових напружень.

На рис. 3 наведено графіки розподілу радіальних (рис. 3, а) та колових (рис. 3, б) напружень на торцях циліндрів за жорсткого закріплення торців, де, на відміну від шарнірного закріплення, мають

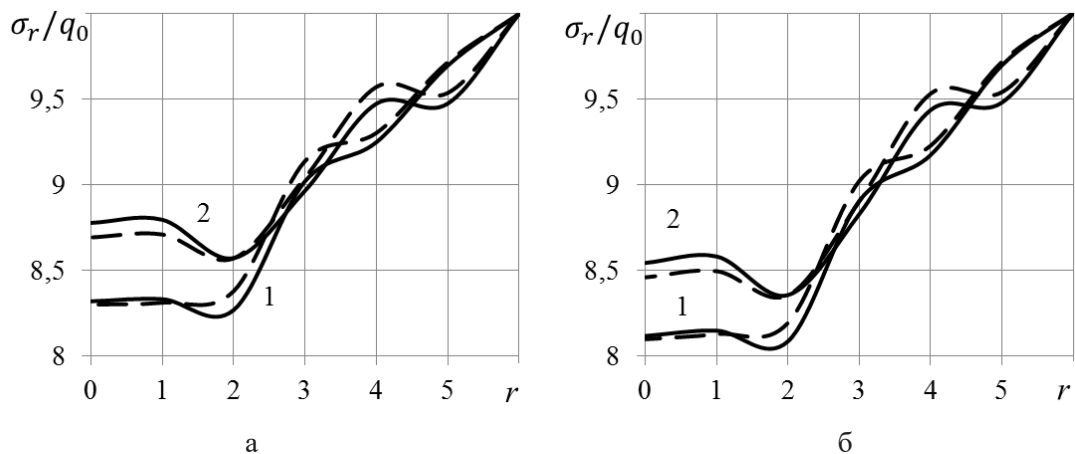


Рис. 1. Розподіл радіальних напружень σ_r за шарнірного (а) та жорсткого (б) закріплення торців у перерізі $z = l/2$

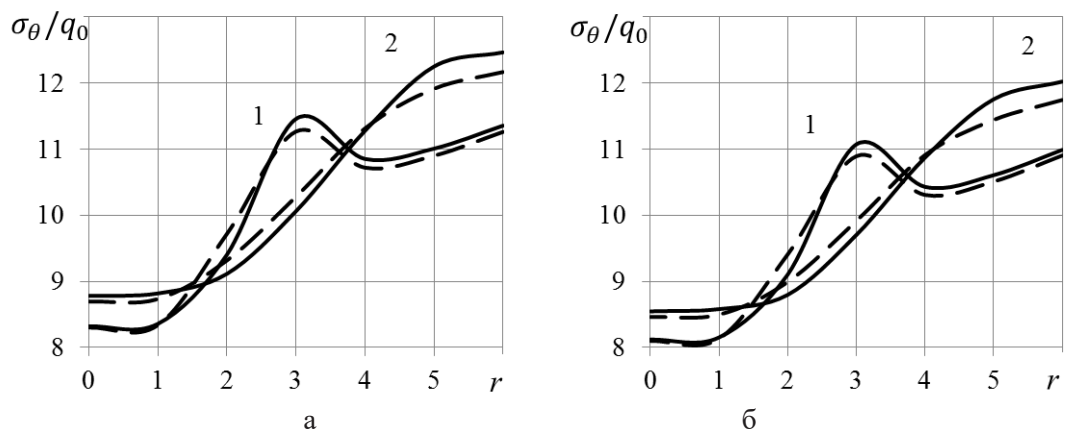


Рис. 2. Розподіл колових напружень σ_θ за шарнірного (а) та жорсткого (б) закріплення торців у перерізі $z = l/2$

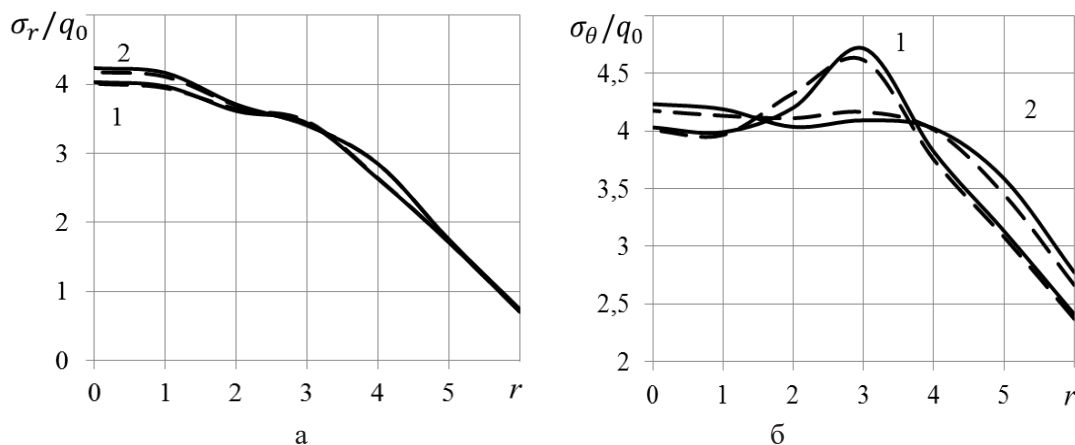


Рис. 3 Розподіл радіальних σ_r (а) та колових σ_θ (б) напружень за жорсткого закріплення торців у перерізі $z = 0$

місце крайові ефекти, що полягають у стрімкому зростанні величини як радіальних, так і колових напружень. При цьому радіальні напруження менш чутливі до варіації закону зміни модуля

пружності та товщини середнього шару. Вздовж радіальної координати величина напружень σ_r зменшується від осі до зовнішньої поверхні приблизно на 15 %.

Для колових напружень у випадку товщини середнього шару $h_2 = 2l_0$ на його границі, що збігається із середнім перерізом циліндра, величина напружень зростає приблизно на 15 %, а потім монотонно спадає, зменшуючись приблизно в 1,5 раза. У випадку більшої товщини середнього шару ($h_2 = 4l_0$) величина колових напружень в інтервалі зміни радіальної координати ($0 \leq r \leq 3/4R$) практично не змінюється, а далі монотонно спадає, зменшуючись приблизно на 15 % на зовнішній поверхні.

Висновки. На основі методу сплайн-апроксимації функцій в поєднанні з чисельним методом дискретної ортогоналізації розв'язано вісесиметричну задачу лінійної теорії пружності про напружений стан суцільних тришарових цилін-

дрів із неперервно-неоднорідним заповнювачем, що перебувають під дією рівномірно-розподіленого радіального навантаження за різних способів закріплення торців. Розглядаються два закони зміни модуля пружності середнього шару від радіальної координати – квадратичний і лінійний та два варіанти товщини середнього шару.

Встановлено, що в умовах розглядуваної задачі закон зміни модуля пружності суттєво не впливає на розподіл характеристик напруженого стану даного класу циліндрів.

Спосіб закріплення торців більшою мірою впливає на величину колових напружень як на зовнішній поверхні циліндра, так і в середньому його перерізі. Для радіальних напружень цей вплив помітний на осі циліндра.

ЛІТЕРАТУРА

1. Процюк Б. В. Про подання розв'язку квазістатичної задачі термopужності для багатошарового циліндра. *Прикл. пробл. мех. і мат.* 2023. Вип. 21. С. 43–63.
2. Senapati A., Jena S.R. A computational scheme for fifth order boundary value problems. *Int. j. inf. tecnol.* 2022. No. 14. P. 1397–1404.
3. Ganendra B., Prabowo A., Muttaqie T., Adiputra R., Ridwan R., Fajri A., Thang Do Q., Carvalho H., Baek S. Thin-walled cylindrical shells in engineering designs and critical infrastructures: A systematic review based on the loading response. *Curved and Layered Structures*. 2023. Vol. 10. No. 1 (20220202).
4. Гребенюк С. М., Морозова І. Ю. Ефективні пружні характеристики волокнистого композиційного матеріалу в умовах попереднього поперечного деформування. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2023. № 2. С. 38–44.
5. Shtanko H.I., Grebenyuk S.M. Features of the construction of the stiffness matrix of the spatial hexagonal finite element for composite material with discrete inclusions based on the moment scheme. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2023. No. 2. P. 75–85.
6. Mendil F., Bechir H., Methia M. Effect of nonhomogeneity on compression of solid circular cylinders made of functionally graded incompressible neo-Hookean materials. *Meccanica*. 2024. No. 59. P. 1625–1638.
7. Токова Л. П., Ясінський А. В. Напружений стан багатошарового неоднорідного циліндра за рівномірного стиску бічної поверхні. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2013. № 11. С. 101–107.
8. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Rozhok L.S. Solving the stress problem for solid cylinders with different end conditions. *Int. Appl. Mech.* 2006. Vol. 42. No. 6. P. 629–635.

REFERENCES

1. Protsiuk, B.V. (2023). Pro podannia rozv'iazku kvazistatichnoi zadachi termopruzhnosti dlia bahatosharovoho tsylindra [On the presentation of the solution of the quasi-static thermoelasticity problem for a multilayer cylinder]. *Prykladni problemy mekhaniky i matematyky*, 21, 43–63 [in Ukrainian].
2. Senapati, A., Jena, S.R. (2022). A computational scheme for fifth order boundary value problems. *Int. j. inf. tecnol.*, 14, 1397–1404.
3. Ganendra, B., Prabowo, A., Muttaqie, T., Adiputra, R., Ridwan, R., Fajri, A., Thang, Do Q., Carvalho, H., Baek, S. (2023). Thin-walled cylindrical shells in engineering designs and critical infrastructures: A systematic review based on the loading response. *Curved and Layered Structures*, 10 (1), 20220202.
4. Hrebeniuk, S.M., Morozova, I.Yu. (2023). Efektyvni pruzhni kharakterystyky voloknystoho kompozytsiinoho materialu v umovakh poperednoho poperechnoho deformuvannia [Effective elastic characteristics of fibrous composite material under conditions of preliminary transverse deformation]. *Computer Science and Applied Mathematics*, 2, 38–44 [in Ukrainian].
5. Shtanko, H.I., Grebenyuk, S.M. (2023). Features of the construction of the stiffness matrix of the spatial hexagonal finite element for composite material with discrete inclusions based on the moment scheme. *Computer Science and Applied Mathematics*, 2, 75–85.
6. Mendil, F., Bechir, H., Methia, M. (2024). Effect of nonhomogeneity on compression of solid circular cylinders made of functionally graded incompressible neo-Hookean materials. *Meccanica*, 59, 1625–1638.
7. Tokova, L.P., Yasynskyi, A.V. (2013). Napruzhnyi stan bahatosharovoho neodnorodnoho tsylindra za rivnomirnogo stysku bichnoi poverkhni [Stress state of a multilayer inhomogeneous cylinder under uniform compression of the lateral surface] *Prykladni problemy mekhaniky i matematyky*, 11, 101–107 [in Ukrainian].
8. Grigorenko, Ya.M., Grigorenko, A.Ya., Rozhok, L.S. (2006). Solving the stress problem for solid cylinders with different end conditions. *Int. Appl. Mech.*, 42 (6), 629–635.