

ЗГИН ПЛАСТИНИ З ПРУЖНОЮ КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ ВСЕРЕДИНІ ШАЙБИ ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Слободян М. С.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0001-5357-8584,
mykola.slobodyan@lnu.edu.ua*

Звізло І. С.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна,
orcid.org/0009-0004-9804-6572
ivan.zvizlo@lnu.edu.ua*

Білаш О. В.

*кандидат економічних наук, магістр з прикладної математики,
доцент кафедри інженерної механіки
Національна академія сухопутних військ
імені гетьмана Петра Сагайдачного
вул. Героїв Майдану, 32, Львів, Україна
orcid.org/0000-0001-7515-7641
oksana.opanasovych@gmail.com*

Смаль О. В.

*студент
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0009-0002-4495-6648,
oleh.smal@lnu.edu.ua*

Ключові слова: тріщина, згин, пружна шайба, ізотропна пластинка, контакт, комплексні потенціали, задачі лінійного спряження, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності.

У роботі розв'язано задачу про двовісний згин безмежної ізотропної пластини з пружною круговою шайбою з іншого матеріалу та наскрізною прямолінійною радіальною тріщиною у шайбі. Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження, а на межі пружної кругової шайби та пластини виконуються умови ідеального механічного контакту. Для розв'язування задачі припускається, що під дією рівномірно розподілених згинальних моментів на нескінченності береги тріщини контактують по області сталої ширини (смуговий контакт) на верхній основі пластини по всій довжині тріщин. Задача розв'язана за таких крайових умов: $P_{r1} = P_{r2}$, $M_{r1} = M_{r2}$, $w_1 = w_2$, $\frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r}$, $\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}$, $\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}$, $u_{rp}^{(1)} = u_{rp}^{(2)}$, $u_{\theta p}^{(1)} = u_{\theta p}^{(2)}$, на L (умови ідеального механічного контакту); $P^\pm = 0$, $M_{y_1}^\pm = \delta h N$, $\tau_{yx_1 y_1}^\pm = 0$, $\sigma_{yy_1 y}^\pm = -0,5 N/h$, $\partial[v_{II}]/\partial x_1 + \alpha h [\partial^2 w / \partial x_1 \partial y_1] = 0$, $\alpha = 0.5(1 + (1 - \gamma)^2)$,

$\delta = 1 - \gamma/3$ (умови смугового контакту берегів тріщини), $\gamma = h_1/h$, $x_1 \in L_1$, де M_r – згинальний момент, P_r – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізуювальна сила, σ_{rr} і σ_{rr0} – компоненти тензора напружень у полярній системі координат, N – контактне зусилля між берегами тріщини, h – товщина пластини, h_1 – висота контакту берегів тріщини, w – прогин пластини, σ_{yy_1} і τ_{yx_1} – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, v_{rr} – компонента вектора переміщень; $[f] = f^+ - f^-$, знаками «+» і «-» позначені граничні значення функцій при прямуванні точки площини до тріщини, якщо $y_1 \rightarrow \pm 0$.

Через контакт берегів тріщини розв'язок задачі шукатимемо у вигляді розв'язків двох взаємопов'язаних задач: задачі згину пластини, використовуючи теорію Кірхгофа – Лява, та плоскої задачі. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі побудовано задачі лінійного спряження. Отримано задачі лінійного спряження розв'язані аналітично, та отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно стрибків переміщень у плоскій задачі та стрибків кутів повороту в задачі згину на берегах тріщини. Ця система сингулярних інтегральних рівнянь за допомогою методу механічних квадратур зведена до системи алгебраїчних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу Гауса. Проведено числовий аналіз задачі та побудовані графічні залежності контактних зусиль і коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів за різних геометричних параметрів задачі та різних значень рівномірно розподілених згинальних моментів на нескінченності. У часткових випадках отримані результати зійшлися з відомими результатами, отриманими в наукових працях іншими авторами.

Ключові слова: тріщина, згин, пружна шайба, ізотропна пластинка, контакт, комплексні потенціали, задачі лінійного спряження, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності.

BENDING OF THE PLATE WITH AN ELASTIC CIRCULAR WASHER AND A RADIAL CRACK INSIDE THE WASHER CONSIDERING THE STRIP CONTACT OF ITS EDGES

Slobodian M. S.

*Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5357-8584,
mykola.slobodyan@lnu.edu.ua*

Zvizlo I. S.

*Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0009-0004-9804-6572
ivan.zvizlo@lnu.edu.ua*

Bilash O. V.

*Ph.D. in Economic Sciences, Master of Applied Mathematics,
Associate Professor at Department of Engineering Mechanics
Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy
Heroiv Maydana str., 32, Lviv, Ukraine,
orcid.org/0000-0001-7515-7641
oksana.opanasovych@gmail.com*

Smal O. V.

*Student
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0009-0002-4495-6648
oleh.smal@lnu.edu.ua*

Key words: crack, bending, elastic washer, isotropic plate, contact, complex potentials, linear conjugation problems, contact force, intensity factors.

This work presents a solution of biaxial bending of an infinite isotropic plate with an elastic circular washer made of a different material and a through straight crack inside the washer. The edges of the crack are free from external loads and the conditions of ideal mechanical contact are fulfilled at the boundary of the elastic circular washer and the plate. It is assumed that under the action of uniformly distributed bending moments at infinity, the edges of the crack are in contact on area of constant width (strip contact) on the upper base of the plate along the entire length of the cracks. The problem is solved under the following boundary conditions: $P_{r1} = P_{r2}$, $M_{r1} = M_{r2}$, $w_1 = w_2$, $\frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r}$, $\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}$, $\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}$, $u_{rP}^{(1)} = u_{rP}^{(2)}$, $u_{\theta P}^{(1)} = u_{\theta P}^{(2)}$, on L (conditions of ideal mechanical contact); $P^\pm = 0$, $M_{y_1}^\pm = \delta h N$, $\tau_{rx_1 y_1}^\pm = 0$, $\sigma_{\theta y_1 y_1}^\pm = -0,5 N/h$, $\partial[v_\theta]/\partial x_1 + \alpha h[\partial^2 w/\partial x_1 \partial y_1] = 0$, $\alpha = 0,5(1 + (1 - \gamma)^2)$, $\delta = 1 - \gamma/3$ (conditions of strip contact of crack edges), $\gamma = h_1/h$, $x_1 \in L_1$, where M_r – bending moment, P_r – generalized Kirchhoff shear force, σ_{rr} and $\sigma_{r\theta}$ – stress tensor components in the polar coordinate system, N – contact force between the edges of the crack, h – plate thickness, h_1 – height of the contact zone of crack, w – plate deflection, $\sigma_{\theta y_1 y_1}$ and $\tau_{rx_1 y_1}$ – stress tensor components in the Cartesian coordinate system, v_θ – displacement vector component; $[f] = f^+ - f^-$, the “+” and “-” signs indicate the boundary values of the function when the point of the plane approaches the crack at $y_1 \rightarrow \pm 0$.

Due to the contact of the crack edges, the solution to the problem will be sought as a superposition of two interrelated problems: the problem of the plate bending, using the Kirchhoff–Love theory and the plane problem. Using the methods of the theory of functions of a complex variable and complex potentials of Kolosov–Muskhelishvili, linear conjugate problems were constructed. The obtained linear conjugate problems are solved analytically and a system of singular integral equations was obtained for the displacement jumps in the plane problem and the jumps of rotation angles in the bending problem at the crack edges. The system of singular integral equations was reduced to a system of algebraic equations, using the method of mechanical quadrature and was solved numerically by the Gaussian method. A numerical analysis of the problem is conducted and graphic dependencies of contact forces and intensity coefficients of forces and moments were constructed for different geometric parameters of the problem and different values of uniformly distributed bending moments at infinity. In some cases, the results obtained coincided with the known results obtained in scientific works by other authors.

Вступ та огляд літератури. Пластинчасті конструктивні елементи широко використовуються в різних сферах техніки. Вони можуть містити локальні технологічні включення, а під час експлуатації в таких елементах можуть утворюватися тріщини, що суттєво знижують допустиме навантаження, яке можна прикладати до конструкції. З фізичного погляду очевидно, що за згину пластини береги тріщин взаємодітимуть між собою. Тому розробка методів оцінки напружено-деформованого стану пластин із тріщинами, береги яких контактують у разі згину, є важливою науково-технічною проблемою механіки.

Дослідження напружено-деформованого стану пластин із тріщинами за згину пластини з використанням класичної теорії згину пластин проведено в роботах [1–4]. У них припускалося, що береги тріщини контактують по лінії по всій довжині тріщини на верхній поверхні пластини (лінійний контакт). Кальтгоф Дж. Ф., Шацький І. П. і Бюргель А. [5] ек-

периментально вивчали контактну взаємодію берегів тріщини за згину пластини та підтвердили наявність мембранної складової в полі напружень поблизу тріщини, що є прямим наслідком контакту її берегів.

У працях [6, 7] уперше побудовано аналітичний розв'язок задачі про згин пластини з наскрізною тріщиною, береги якої контактують по висоті пластини (смуговий контакт). Напружено-деформований стан за згину безмежної пластини з прямолінійними тріщинами за смугового контакту їхніх берегів і круговим отвором або абсолютно жорсткою круговою шайбою розглянуто в [8–10]. Дослідження напружено-деформованого стану тіл з міжфазними тріщинами із зонами контакту проведено в роботах [11, 12]. Вплив контакту берегів термоізолюваної міжфазної тріщини за термомеханічного навантаження на напружено-деформований стан досліджено в [13]. Тому задачі згину пластин з отворами, включеннями та тріщинами, береги яких контактують, є актуальними.

У цій роботі досліджується задача про згин нескінченної ізотропної пластини з пружним круговим включенням і прямолінійною наскрізною радіальною тріщиною, береги якої гладко контактують по області сталої ширини по всій їх довжині на верхній основі пластини.

Формулювання задачі. Розглянемо безмежну ізотропну пластину товщиною $2h$, яка містить пружну кругову шайбу радіуса R та прямолінійну наскрізну тріщину довжиною $2l$. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат Oxy з початком у центрі пружної шайби. У площині Oxy введемо полярну систему координат r і θ з полюсом у точці O та полярною віссю Ox . Центр радіальної тріщини розміщений у точці O_1 з координатами $(x_0, 0)$ на осі Ox . У точці O_1 виберемо початок декартової системи координат $O_1x_1y_1$, яка буде пов'язана з тріщиною. Нехай на нескінченності пластина згинається рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ . Через $S^+(S_1)$ позначимо область усередині пружної шайби, а через $S^-(S_2)$ – ззовні; через L_1 – лінію, де розміщена тріщина, а через L – колову межу пружної шайби (див. рис. 1).

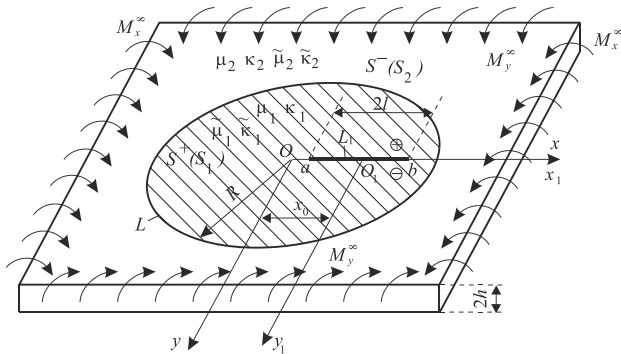


Рис. 1. Безмежна пластина з пружною шайбою та радіальною тріщиною

Пружним характеристикам пов'язаних із шайбою приписуватимемо індекс «1», а з пластинною – індекс «2». Зауважимо, що тут і в подальшому індекс j набуває значень 1 і 2, де $j=1$ відповідає шайбі (область S_1), $j=2$ – пластині (область S_2).

Вважатимемо, що за такого навантаження береги тріщин контактують по області сталої ширини величиною h_1 на верхній основі пластини по всій довжині тріщини (смуговий контакт). Через контакт берегів тріщини розв'язок задачі шукатимемо у вигляді розв'язків двох взаємопов'язаних задач: задачі згину пластини, використовуючи теорію Кірхгофа – Лява, та плоскої задачі.

На межі пружної шайби виконуються умови ідеального механічного контакту

$$P_{r1} = P_{r2}, \quad M_{r1} = M_{r2}, \quad w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r}, \quad \text{на } L, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}, \quad u_{rp}^{(1)} = u_{rp}^{(2)}, \quad u_{\theta p}^{(1)} = u_{\theta p}^{(2)}, \quad \text{на } L, \quad (2)$$

де P_{rj} – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізуювальна сила, M_{rj} – згинальний момент, w_j – прогин j -ї частини; $\sigma_{rr}^{(j)}, \sigma_{r\theta}^{(j)}$ – компоненти тензора напружень, а $u_{rp}^{(j)}, u_{\theta p}^{(j)}$ – компоненти вектора переміщень у плоскій задачі в полярній системі координат r, θ .

Крайові умови смугового контакту берегів тріщини [7]

$$P^\pm = 0, \quad M_{y_1}^\pm = \delta h N_1, \quad \tau_{\mu y_1 y_1}^\pm = 0, \quad \sigma_{\mu y_1 y_1}^\pm = -\frac{N_1}{2h}, \quad \delta = 1 - \frac{\gamma}{3}, \quad x_1 \in L_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial [v_\Pi]}{\partial x_1} + \alpha h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1} \right] = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2} (1 + (1 - \gamma)^2), \quad \gamma = \frac{h_1}{h}, \quad x_1 \in L_1, \quad (4)$$

де N_1 – контактне зусилля між берегами тріщини, h_1 – висота контакту берегів тріщини, w – прогин пластини, $\sigma_{\mu y_1 y_1}$ і $\tau_{\mu x_1 y_1}$ – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, v_Π – компонента вектора переміщень; $[f] = f^+ - f^-$, знаками «+» і «-» позначені граничні значення функцій при прямуванні точки площини до тріщини, якщо $y_1 \rightarrow \pm 0$.

Розв'язок задачі

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі та задачі згину пластини [9, 14], задовольняючи крайові умови (1) – (4), розв'язок задачі зведемо до задач лінійного спряження, розв'язавши які, отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень $g'_i(t)$ та стрибків кутів повороту $Q_i(t)$ на берегах тріщини, яка набуде вигляду

$$\int_{L_1} (L(t, x) g'_1(t) + L^{(1)}(t, x) \operatorname{Re}(g'_1(t)) + M(t, x) g'_1(t)) dt = N(x), \quad x \in L_1, \quad (5)$$

$$\int_{L_1} (R(t, x) Q_1(t) + \bar{L}^{(1)}(t, x) \operatorname{Re} Q_1(t) + S(t, x) \bar{Q}_1(t)) dt + H(x) = M_n(x), \quad x \in L_1, \quad (6)$$

де

$$L(t, x) = -\frac{h}{\pi} \left\{ -\frac{\mu_1 - \mu_2}{A_1} \cdot \left(1 + \frac{R^2}{X^2} \right) \cdot \frac{1}{T} + \frac{1}{T - X} + \frac{1}{T - \bar{X}} + \frac{\mu_1 \kappa_2 - \mu_2 \kappa_1}{A_2} \cdot \frac{R^2}{X^2} \times \right. \\ \times \frac{\bar{X}}{XT - R^2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{A_1} \cdot \left(\frac{\bar{T}}{XT - R^2} + \left(1 + \frac{R^2}{X^2} \right) \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) \cdot \frac{R^2}{(XT - R^2)^2} - \right. \\ \left. \left. - \left(X - \frac{R^2}{\bar{X}} \right) \cdot \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) \cdot \frac{2R^2 T}{(XT - R^2)^3} \right) \right\},$$

$$M(t, x) = -\frac{h}{\pi} \left\{ -\frac{\mu_1 - \mu_2}{A_1} \cdot \frac{1}{T} + \frac{1}{T - X} + \frac{T - X}{(T - \bar{X})^2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{A_1} \times \right.$$

$$\times \left\{ \left(\frac{R^2}{\bar{T}} - T \right) \frac{R^2}{(X\bar{T} - R^2)^2} + \left(1 + \frac{R^2}{\bar{X}^2} \right) \frac{T}{X\bar{T} - R^2} - \left(X - \frac{R^2}{\bar{X}} \right) \frac{T_k^2}{(X\bar{T} - R^2)^2} \right\},$$

$$L^{(1)}(t, x) = -\frac{2A_1 h t}{\pi R^2 (1 - A_4)} \left(\frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{A_1} + \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{A_1} - \frac{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}{A_2} \right) \frac{R^2}{\bar{X}^2} \right),$$

$$A_1 = \mu_1 + \mu_2 \kappa_1, \quad A_2 = \mu_2 + \mu_1 \kappa_2, \quad A_3 = \frac{\mu_1 \kappa_2 - \mu_2 \kappa_1}{A_2},$$

$$A_4 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{A_1}, \quad g = -\frac{A_1}{A_2},$$

$$\widetilde{DZ}_j = \tilde{A}_2^{-1} (\tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1) \quad \widetilde{D\Gamma}_j = \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{A}_1}$$

$$R(t, x) = \frac{1}{2\pi \tilde{\mu}_1^*} \left\{ -\tilde{\kappa}_1^* \left(\frac{1}{T - X} - \frac{\tilde{\kappa}_1^* (\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) \bar{T}}{\tilde{A}_1 (X\bar{T} - R^2)} \right) + \right.$$

$$+ \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{A}_1} \left(-\frac{1}{T} + \frac{R^2}{(T\bar{X} - R^2)^2} \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) \right) - \frac{2(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) R^2 T X}{\tilde{A}_1 (T\bar{X} - R^2)^3} \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) +$$

$$+ \frac{R^2}{\bar{X}^2} \left\{ \frac{(\tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1) \bar{X}}{\tilde{A}_2 (T\bar{X} - R^2)} + \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{A}_1} \left(-\frac{1}{T} + \frac{R^2 (2T\bar{X} - R^2)}{(T\bar{X} - R^2)^3} \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) \right) - \frac{\tilde{\kappa}_1^*}{\bar{T} - \bar{X}} \right\} \right\}$$

$$S(t, x) = \frac{\tilde{\kappa}_1^*}{2\pi \tilde{\mu}_1^*} \left\{ -\frac{(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2)}{\tilde{A}_1} \left(\frac{R^2}{(T\bar{X} - R^2)^2} \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) - \frac{1}{\bar{T}} \right) + \frac{(\tilde{\kappa}_1^*)^{-1}}{\bar{T} - \bar{X}} - \frac{(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) T}{\tilde{A}_1 (T\bar{X} - R^2)} + \right.$$

$$- \frac{T}{(\bar{T} - \bar{X})^2} - \frac{(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) R^2}{\tilde{A}_1 \bar{X}^2} \left(\frac{T\bar{X}}{T\bar{X} - R^2} + 1 \right) \cdot \frac{\tilde{\kappa}_1^*}{X\bar{T} - R^2} +$$

$$+ X \left\{ \frac{1}{(\bar{T} - X)^2} + \frac{\tilde{\kappa}_1^* (\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) T^2}{\tilde{A}_1 (X\bar{T} - R^2)^2} \right\} \right\},$$

$$\tilde{L}^{(1)}(t, x) = \frac{t}{2\pi \tilde{\mu}_1^* R^2} \left(\tilde{D}_{31} (1 - \tilde{\kappa}_1^*) + \tilde{D}_{31} \frac{R^2}{\bar{X}^2} \right),$$

$$H(x) = \frac{1}{\tilde{\mu}_1^*} \left\{ \Gamma_2 \left(\tilde{B}_{51} (1 - \tilde{\kappa}_1^*) + \frac{R^2}{\bar{X}^2} \tilde{B}_{91} \right) + \Gamma_2' \tilde{B}_{61} \right\},$$

$$\tilde{A}_1 = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1, \quad \tilde{A}_2 = \tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2, \quad \tilde{A}_4 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\tilde{A}_1},$$

$$\tilde{A}_5 = \frac{\mu_2 (1 + \tilde{\kappa}_1)}{\tilde{A}_1}, \quad \tilde{B}_4 = -\frac{\tilde{A}_4 (\tilde{\kappa}_1^* - 1)}{1 - \tilde{A}_4},$$

$$\tilde{B}_3 = -\frac{1 - \tilde{g}^{-1} \tilde{A}_3}{1 - \tilde{A}_4}, \quad \tilde{B}_5 = -\frac{\tilde{A}_4 (\tilde{\kappa}_1^* + 1)}{1 + \tilde{A}_4}, \quad \tilde{g} = -\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2},$$

$$\tilde{B}_{11} = 0, \quad \tilde{B}_{21} = A_1^{-1} (\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1),$$

$$\tilde{B}_{31} = A_1^{-1} [2\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_1 (\tilde{\kappa}_2 - 1)], \quad \tilde{B}_{41} = \tilde{A}_1^{-1} \tilde{\mu}_1 (1 + \tilde{\kappa}_2),$$

$$B_{51} = \tilde{B}_{31} + \tilde{B}_3 \tilde{B}_{21}, \quad \tilde{D}_{31} = \tilde{B}_4 \tilde{B}_{21},$$

$$\tilde{B}_{61} = \tilde{A}_2^{-1} (\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2), \quad \tilde{B}_{71} = \tilde{A}_2^{-1} (\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2), \quad \tilde{B}_{81} = 0,$$

$$\tilde{B}_{91} = \tilde{B}_{51} - \tilde{B}_{71} \tilde{B}_3, \quad \tilde{\mu}_j^* = \tilde{\mu}_j,$$

$$\tilde{D}_{51} = 2\tilde{B}_{11} + B_3 (\tilde{B}_{21} - \tilde{B}_{71}) + \tilde{B}_{81} + \tilde{B}_{41}, \quad X = x_0 + x_1,$$

$$T = x_0 + t_1, \quad \kappa_j = \frac{3 - v_j}{1 + v_j},$$

$$\Gamma_2 = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D_2(1 + v_2)}, \quad \Gamma_2' = \frac{M_x^\infty - M_y^\infty}{2D_2(1 - v_2)}, \quad D_2 = \frac{2E_2 h^3}{3(1 - v_2^2)},$$

$$\tilde{\kappa}_j^* = \tilde{\kappa}_j = \frac{3 + v_j}{1 - v_j},$$

$$Q_1(t) = -\frac{i}{1 + \tilde{\kappa}_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} + i \frac{\partial w}{\partial y_1} \right], \quad Q_1(t) = Q_{11}(t) + i Q_{12}(t),$$

$$g_1'(t) = \frac{2\mu_1}{i(1 + \kappa_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} ([u_p^{(1)}] + i[v_p^{(1)}]),$$

$$g_1'(t) = g_{11}'(t) + i g_{12}'(t),$$

де $Q_{11}(t), Q_{12}(t), g_{11}'(t), g_{12}'(t)$ – дійсні невідомі функції; $\mu_j = E_j/(2(1 + v_j))$, E_j і v_j – відповідно модуль пружності і коефіцієнт Пуассона для j -ї області, $j = 1, 2$.

З крайової умови (4) матимемо

$$g_{11}'(x_1) + \frac{1 + \tilde{\kappa}_1}{(1 + \kappa_1)(1 + v_1)} Q_{11}(x_1) = 0, \quad x_1 \in [-l, l]. \quad (7)$$

Зауважимо, що мають виконуватись умови однозначності прогину й кутів повороту нормалі до серединної поверхні за обходу контуру тріщини, які набудуть вигляду

$$\int_{L_1} Q_1(t) dt = 0, \quad \int_{L_1} t \operatorname{Im} Q_1(t) dt = 0. \quad (8)$$

Таким чином, щоб визначити невідомі функції $g_1'(t)$, $Q_1(t)$, ми маємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (5) – (8), яку розв'язуватимемо чисельно методом механічних квадратур [14, 15].

Чисельний аналіз

На рис. 2 наведено графік зведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$, якщо $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 1$, $\lambda = R/l = 5$, $X_0 = x_0/l = 3$, $\gamma = h_1/h = 0.13$. Крива 1 побудована для $\beta = \lg \frac{E_1}{E_2} = -1$, крива 2 – для $\beta = -0.3$, крива 3 – для $\beta = 0$, крива 4 – для $\beta = 0.3$, крива 5 – для $\beta = 1$. Якщо $\beta < 0$, величина контактного зусилля є максимальною у вершині a ($\xi = -1$), а якщо $\beta > 0$ – максимальна у вершині b ($\xi = 1$), поблизу межі пружної шайби.

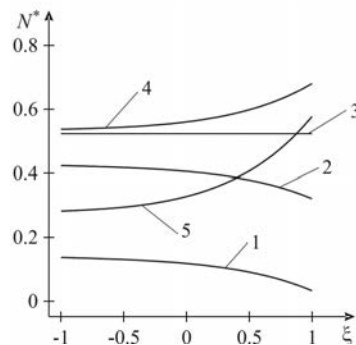


Рис. 2. Графік контактного зусилля N^* між берегами тріщини при різних β

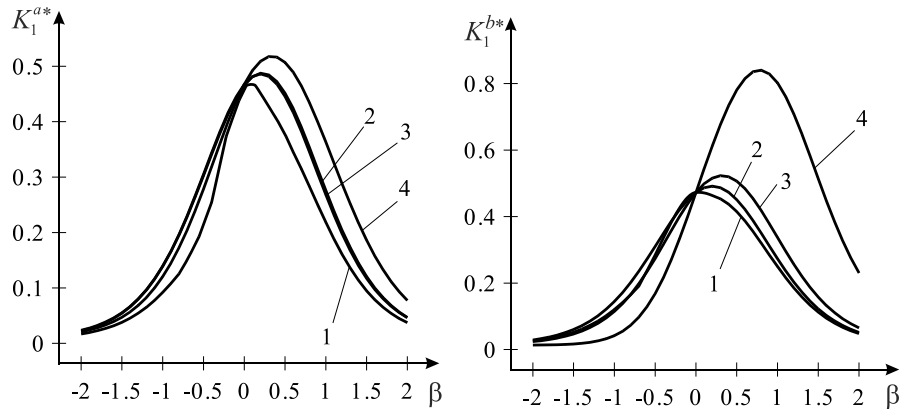


Рис. 3. Графік коефіцієнтів інтенсивності моментів K_1^* у вершинах тріщини a та b від $\beta = \lg E_1/E_2$ за різних значень X_0

На рис. 3 побудовано графіки коефіцієнтів інтенсивності моментів (КІМ) $K_1^* = K_1/(M_y^* \sqrt{l})$ у вершинах тріщини a та b від $\beta = \lg \frac{E_1}{E_2}$ для $\lambda = 4$, $\rho = 1$, $\gamma = 0.13$. Криві 1 побудовані для $X_0 = 0$, криві 2 – для $X_0 = 0.3$, криві 3 – для $X_0 = 1.3$, криві 4 – для $X_0 = 2$. Якщо $\beta < 0$, КІМ у вершинах тріщини a та b зростають зі збільшенням β . Якщо $\beta > 0$, величина КІМ у вершині тріщини b є більшою за величину КІМ у її вершині a . Крім того, з наближенням вершини тріщини b до колової межі поділу матеріалів, якщо $\beta > 0$, КІМ у ній збільшуються для будь-якого фіксованого β .

Висновки. У цій роботі вперше побудовано розв'язок задачі про згин нескінченної пластини з пружним включенням і прямолінійною радіальною тріщиною у цьому включенні, за смугового контакту її берегів, а також досліджено вплив модулів пружності матеріалів пластини та пружної шайби на контактне зусилля й коефіцієнти інтенсивності моментів у вершинах тріщини.

Коли модулі пружності матеріалу пластини та пружної шайби є однаковими ($\beta = 0$), отримаємо випадок однієї ізольованої тріщини за смугового контакту її берегів у пластині [6, 7], а якщо $\beta = 0$ і $\gamma = 0$, отримаємо випадок однієї ізольованої тріщини за лінійного контакту її берегів [1, 2]. Як показав чисельний аналіз, зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль $k_1^* = k_1/(M_y^* \sqrt{l})$ і моментів $K_1^* = K_1/(M_y^* \sqrt{l})$ пов'язані залежністю $k_1^*/K_1^* = 3\alpha(1 + \nu_1)/(3 + \nu_1)$, тому графічні залежності для k_1^* не наведені в роботі.

У перспективі планується дослідити напружено-деформований стан пластини з пружним включенням і системою наскрізних прямолінійних тріщин, які розміщені як у пластині, так і у пружному включенні, за смугового контакту їхніх берегів. А також із застосуванням енергетичного критерію руйнування планується визначити величину максимального навантаження, яке можна бути прикладене до такої пластини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. *Доповіді Академії наук УРСР. Серія А. Фізико-математичні та технічні науки*. 1988. № 7. С. 4951.
2. Young M., Sun C. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates. *International Journal of Fracture*. 1992. Vol. 55. P. 81–93.
3. Shatskyi I., Dalyak T. Interaction of contact cracks and narrow slits in plate bending. *Procedia Structural Integrity*. 2018. Vol. 13. P. 1476–1481.
4. Dalyak T.M., Shatskyi I.P. Interference of closable cracks and narrow slits in an elastic plate under bending. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2020. Vol. 14, no. 2. P. 51–68.
5. Кальтгоф Дж. Ф., Шацький І. П., Бюргель А. Експериментальне підтвердження контакту берегів тріщини при згині пластини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: у 3 т. / під заг. ред. В. В. Панасюка*. Львів : Каменяр, 1999. Т. 1. С. 72–74.
6. Dempsey J.P., Shekhtman I.I., Slepyan L.L. Closure of a through crack in a plate under bending. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. P. 4077–4089.
7. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь. *Наукові нотатки Луцького технічного університету*. 2007. Вип. 20 (2). С. 123–127.
8. Слободян М. С., Кузь І. С., Білаш О. В., Шайнога М. І. Згин із розтягом пластини з отвором та системою тріщин за смугового контакту їхніх берегів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2020. № 1. С. 77–85.

9. Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь : колективна монографія. Кундрат М. М., Гук Н. А., Козакова Н. Л., Острик В. І., Слободян М. С. та інші ; за заг. ред. Р. М. Мартиняка. Львів : Видавець Вікторія Кундельська, 2022. 392 с.
10. Slobodian M., Zvizlo I., Bilash O., Sorokatyi M., Petruchenko O., Markevych L. Bending of a piecewise homogeneous plate with a circular interfacial materials separation zone and radial crack considering the strip contact of its edges. *Vibroengineering Procedia*. 2024. Vol. 55. P. 54–59.
11. Adlucky V.J., Loboda V.V. Finite-element analysis of the elastoplastic state of a plane with elliptic inclusion in the presence of interface crack. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270, no. 1. P. 76–86.
12. Loboda V., Sheveleva A., Mykhail O. A slipping zone model for a conducting interface crack in a piezoelectric biomaterial. *Mechanics and Physics of Structured Media: Asymptotic and Integral Equations Methods of Leonid Filshinsky*. 2022. P. 253–269.
13. Serednytska K.I., Martynyak R.M. Contact of the faces of an interface thermally insulated crack under thermomechanical loading. *Materials Science*. 2021. Vol. 57, no. 2. P. 173–179.
14. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.
15. Саврук М. П., Зеленьак В. М. Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. Львів : РАСТР, 2009. 212 с.

REFERENCES

1. Shatskyi, I.P. (1988). Zghyn plastyny, oslablenoi rozrizom z kontaktuiuchymy berehamy [Bending of a plate weakened by a section with contacting shores]. *Dopovidi Akademii nauk URSS. Seriya A. Fizyko-matematychni ta tekhnichni nauky* [Report of the USSR Academy of Sciences. Ser. A. Phys.-Math. and Tech. Science], 7, 49–51 [in Ukrainian].
2. Young, M., Sun, C. (1992). Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates. *International Journal of Fracture*, 55, 81–93.
3. Shatskyi, I., Dalyak, T. (2018). Interaction of contact cracks and narrow slits in plate bending. *Procedia Structural Integrity*, 13, 1476–1481.
4. Dalyak, T.M., Shatskyi, I.P. (2020). Interference of closable cracks and narrow slits in an elastic plate under bending. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 14 (2), 51–68.
5. Kalthof, Dzh.F., Shatskyi, I.P., Biurhel, A. (1999). Eksperymentalne pidtverdzhenia kontaktu berehiv trishchyny pry zghyni plastyny [Experimental confirmation of the contact of the crack]. *Mekhanika ruinuvannya materialiv i mitsnist konstruktiv* [Mechanics of fracture of materials and strength of structures] (eds V.V. Panasiuk). Lviv: Kameniar. 1, 72–74 [in Ukrainian].
6. Dempsey J.P., Shekhtman I.I., Slepyan L.L. (1998). Closure of a through crack in a plate under bending. *International Journal of Solids and Structures*, 35, 4077–4089.
7. Opanasovych, V.K. (2007). Zghyn plastyny z naskriznoi priamoliniinoiu trishchynoiu z urakhuvanniam shyryny oblasti kontaktu yii poverkhon [Bending of a plate with a through rectilinear crack taking into account the width of the contact area of its surfaces]. *Naukovi notatky Lutskoho tekhnichnoho universytetu* [Scientific Notes of Lutsk Technical University], 20 (2), 123–127 [in Ukrainian].
8. Slobodian, M.S., Kuz, I.S., Bilash, O.V., Shaynoga, M.I. (2020). Zghyn iz roztyahom plastyny z otvorom ta systemoyu trishchyn za smuhovoho kontaktu yikhnikh berehiv [Bending and Tension of a Plate with a Hole and System of Cracks on the Assumption of Striplike Crack Closure]. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu. Fizyko-matematychni nauky* [Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences], 1, 77–85 [in Ukrainian].
9. Kundrat, M.M., Huk, N.A., Kozakova, N.L., Ostryk, V.I., Slobodian, M.S., and others (2022). Kontaktna mekhanika. Shorstkist, rozsharuvannya i znoshuvannya poverkhon: kolektyvna monohrafiya [Contact mechanics. Roughness, delamination and wear of surfaces: collective monograph]; under the general editorship of R.M. Martynyak. Lviv: Publisher Viktoriia Kundelska [in Ukrainian].
10. Slobodian, M., Zvizlo, I., Bilash, O., Sorokatyi, M., Petruchenko, O., Markevych, L. (2024). Bending of a piecewise homogeneous plate with a circular interfacial materials separation zone and radial crack considering the strip contact of its edges. *Vibroengineering Procedia*, 55, 54–59.
11. Adlucky, V.J., Loboda, V.V. (2023). Finite-element analysis of the elastoplastic state of a plane with elliptic inclusion in the presence of interface crack. *Journal of Mathematical Sciences*, 270 (1), 76–86.
12. Loboda, V., Sheveleva, A., Mykhail, O. (2022). A slipping zone model for a conducting interface crack in a piezoelectric biomaterial. *Mechanics and Physics of Structured Media: Asymptotic and Integral Equations Methods of Leonid Filshinsky*, pp. 253–269.
13. Serednytska, K.I., Martynyak, R.M. (2021). Contact of the faces of an interface thermally insulated crack under thermomechanical loading *Materials Science*, 57 (2), 173–179.
14. Sulim, G.T. (2007). Osnovy matematychnoy teoriiy termo pruzhnoyi rinvovahy deformivnykh tverdykh til z tonkymy vkluchennyamy [Fundamentals of the mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable solids with thin inclusions]. Lviv: Research and Publishing Center of the Shevchenko Scientific Society [in Ukrainian].
15. Savruk, M.P., Zeleniak, V.M. (2009). Dvovymirni zadachi teorii pruzhnosti dlia kuskovo-odnorodnykh til z trishchynamy [Two-dimensional problems of the theory of elasticity for piecewise homogeneous bodies with cracks]. Lviv: RASTR [in Ukrainian].