

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-07>

ГОМОГЕНІЗАЦІЯ ТРАНСТРОПНОГО КОМПОЗИТА З ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПОРОЖНИННОГО ВОЛОКНА

Спиця О. Г.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри загальної математики
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-7150-7736
spytso.o.g@gmail.com*

Гоменюк С. І.

*доктор технічних наук, професор,
декан математичного факультету
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-7340-5947
gserega71@gmail.com*

Кудін О. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-5917-9127
avk256@gmail.com*

Столярова А. В.

*доктор філософії,
доцент кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0003-2783-2889
stolyarova.a.v@znu.edu.ua*

Ключові слова: випадкові параметри композита, нормальний закон розподілу, математичне сподівання, щільність розподілу, гомогенізація, ефективні характеристики.

Під час проектування конструкцій з композитних матеріалів на практиці використовують модель композита у вигляді суцільного однорідного середовища. Фізико-механічні його властивості як однорідного матеріалу відображають ефективні сталі. Звичайно, параметри складових частин компонентів композита є випадковими величинами. Тому його ефективні сталі теж є випадковими величинами. У зв'язку з цим актуальною задачею є гомогенізація композита з урахуванням стохастичності його параметрів, у тому числі визначення характеристик пружних сталей як випадкових величин.

У роботі об'єктом дослідження є односпрямований волокнистий композит, фазами якого є трансверсально-ізотропні матриця та порожнисте волокно. Радіус волокна та порожнини у ньому моделюються випадковими

величинами, що мають нормальний закон розподілу. Відповідно, ефективні параметри композита також є випадковими величинами. Запропоновано методику визначення математичного сподівання ефективного поздовжнього модуля пружності, яку можна застосувати для знаходження інших числових характеристик ефективних параметрів як функцій випадкових величин.

Для розв'язання задачі гомогенізації композит моделюється суцільним однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом. На поверхні контакту між матрицею та волокном виконуються умови ідеального з'єднання. У результаті виконаного дослідження отримано формулу для ефективного поздовжнього модуля пружності як функції випадкових величин. Випадковими є об'ємні частки волокна та порожнини у волокні для композита. Знайдено щільності розподілу цих випадкових величин. Пружні сталі волокна та матриці розглядаються як детерміновані величини. Отриманий вираз ефективного поздовжнього модуля пружності у вигляді функції випадкових величин дозволив визначити його характеристики – математичне сподівання та дисперсії. Отримані щільності розподілу випадкових аргументів можна застосувати для визначення інших моментів цієї випадкової величини. Запропоновану методику можна застосувати для розв'язування задачі гомогенізації композитів, фази яких мають випадкові характеристики з іншими неперервними розподілами, відмінними від нормального.

HOMOGENIZATION OF A TRANSTROPIC COMPOSITE WITH RANDOM PARAMETERS OF A HOLLOW FIBER

Spytsia O. H.

*Ph. D. in Physics and Math, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-7150-7736
spytsa.o.g@gmail.com*

Homeniuk S. I.

*D.Sc. in Engineering, Professor,
Dean of the Faculty of Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-7340-5947
gserega71@gmail.com*

Kudin O. V.

*Ph. D. in Physics and Math, Associate Professor,
Professor at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-5917-9127
avk256@gmail.com*

Stoliarova A. V.

*PhD,
Associate Professor at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0003-2783-2889
stoliarova.a.v@znu.edu.ua*

Key words: random parameters of the composite, normal distribution law, mathematical expectation, distribution density, homogenization, effective characteristics.

When designing structures made of composite materials, a composite model is used in practice as a continuous homogeneous medium. Its physical and mechanical properties as a homogeneous material reflect the effective constants. Of course, the parameters of the components of the composite are random variables. Therefore, its effective constants are also random variables. In this regard, the actual task is to homogenize the composite taking into account the stochasticity of its parameters, including the determination of the characteristics of elastic constants as random variables.

In the work, the object of research is a unidirectional fiber composite, the phases of which are a transversal-isotropic matrix and hollow fiber. The radius of the fiber and the cavity in it are modeled as random variables with a normal distribution law. Accordingly, the effective parameters of the composite are also random variables. The method of determining the mathematical expectation of an effective longitudinal modulus of elasticity, which can be used to find other numerical characteristics of effective parameters as functions of random variables, is proposed.

To solve the homogenization problem, the composite is modeled by a continuous homogeneous transversal-isotropic material. The conditions of perfect bonding are fulfilled at the contact surface between the matrix and the fiber. As result of the research, a formula was obtained for the effective longitudinal modulus of elasticity as a function of random variables. The volume fractions of the fiber and the cavity in the fiber for the composite are random. The distribution densities of these random variables are found. The elastic constants of the fiber and matrix are considered as deterministic variables. The obtained expression of the effective longitudinal modulus of elasticity as a function of random variables allowed us to determine its characteristics – mathematical expectation and variance. The obtained distribution densities of random arguments can be used to determine other moments of this random variable. The proposed method can be used to solve the problem of homogenization of composites, the phases of which have random characteristics with other continuous distributions different from the normal one.

Вступ. Розвиток сучасної техніки тісно пов'язаний з розробкою нових матеріалів. Важливе місце серед них посідають композиційні матеріали, властивості яких дозволяють створювати конструкції, оптимальні за своїми параметрами. Композити знайшли широке застосування у різних сферах машинобудування та будівництва. У зв'язку з цим виникає необхідність визначення їхніх властивостей. Щоб уникнути проведення високовартісних експериментальних досліджень виникає необхідність розробки математичних моделей композиційних матеріалів, які б дозволили визначити їхні фізико-механічні характеристики.

Задача визначення характеристик композита як однорідного матеріалу (ефективних характеристик) за відомими характеристиками його складових елементів – це задача гомогенізації композита. Під час розв'язування цієї задачі композит розглядають у вигляді трансверсально-ізотропного однорідного матеріалу.

Суттєвого розширення діапазону технічних характеристик композиційних матеріалів можна досягти, використовуючи для їх армування порожнисті волокна.

У технологічному процесі виробництва композитних матеріалів здебільшого використовуються їх компоненти, геометричні параметри яких мають певні випадкові відхилення від проектних значень. З огляду на те, що ці відхилення є результатом сукупної дії великої кількості факторів, окремий вплив кожного з яких є несуттєвим, то доцільно окремі характеристики фаз композита розглядати як випадкові величини з нормальним законом розподілу.

Стохастичність цих параметрів доцільно враховувати під час розв'язування задач гомогенізації композитів. При цьому ефективні характеристики композитів отримуємо у вигляді функцій випадкових параметрів їх компонентів, тобто вони є також випадковими величинами. Для використання цих ефективних параметрів у проектуванні конструкцій, виготовлених з композитних матеріалів, необхідно визначити числові характеристики цих випадкових величин, зокрема їх математичні сподівання.

Метою роботи є отримання формули для математичного сподівання ефективного поздовжнього модуля пружності першого роду трансропного композита з трансропними компонентами: матрицею та порожнистим волокном.

Об'єктом дослідження є односпрямований волокнистий композит, що складається з транстропних фаз, що моделюється однорідним транстропним матеріалом. Задача гомогенізації розв'язується у циліндричній системі координат (r, φ, z) . Вісь z збігається з віссю волокна, до якої є перпендикулярна площина ізотропії волокна та композита.

До основних гіпотез, прийнятих у цьому дослідженні, належать:

- матеріали матриці і порожнистого волокна є трансверсально-ізотропними,
- напружено-деформований стан композита моделюється лінійними рівняннями теорії пружності;
- у композиті між матрицею та волокном має місце ідеальний контакт;
- досліджується односпрямований композит з гексагональною укладкою волокон;
- стохастичними характеристиками компонентів композита є внутрішній та зовнішній радіуси порожнистого волокна, що моделюється випадковими величинами з нормальним розподілом.

У роботі вперше розв'язано визначення ймовірнісних ефективних характеристик волокнистого композита з порожнистими волокнами.

Огляд літератури та постановка проблеми. Задача гомогенізації трансверсально-ізотропних волокнистих односпрямованих композитів з детермінованими компонентами детально розглянута у монографії [1].

У монографії [2] висвітлено широкий спектр стохастичних методів, що використовується у розв'язанні задач гомогенізації композитних матеріалів. На основі їх застосування досліджено механічні властивості різних типів композитів, зокрема волокнистих та нанокомпозитів. Розглядаються різні підходи до визначення пружних сталих за наявності дефектів у вигляді пошкоджень, тріщин, розв'язується задача гомогенізації з урахуванням наявності дифузії, впливу температурних факторів, досліджено деякі реологічні процеси у композитах. Отримані ефективні термопружні параметри для волокнистого композита, армованого волокнами різних типів.

У статті [3] отримано ефективний поперечний модуль пружності для композита з випадково розташованими односпрямованими волокнами з урахуванням взаємодії між волокнами. Також розв'язана задача гомогенізації для визначення поперечного модуля пружності композита з нестисливою матрицею та жорсткими волокнами. Стохастичний підхід до гомогенізації застосували також у роботі [4]. Тут на основі використання методу Монте-Карло дослідили міжфазні явища у волокнистих композитах. Зокрема, досліджено процес порушення з'єднання волокна та матриці.

У роботах [5–7] розглядалися задачі визначення окремих ефективних характеристик волокнистих композитів з урахуванням випадковості деяких параметрів фаз композита. Так, у [5] отримано формулу для визначення математичного спо-

дівання стохастичного ефективного поздовжнього модуля пружності для випадку, коли ці характеристики для матриці та волокна є нормально розподіленими випадковими величинами. У [6] отримано таку залежність для випадкового радіусу суцільного волокна, у [7] визначено стохастичний ефективний модуль зсуву за наявності нормального розподіленого радіусу волокна.

Об'єктом досліджень [2–7] є композиційні матеріали, армовані суцільними волокнами. Проте у багатьох конструкціях з технічних та економічних вимог доцільно використовувати композити, армовані порожнистими волокнами. Вже отримано розв'язок задачі гомогенізації композитів з порожнистими волокнами без урахування дії випадкових факторів. Розв'язання цієї задачі наведено у роботі [8]. У ній отримані аналітичні детерміновані залежності ефективних сталих трансверсально-ізотропного односпрямованого волокнистого композита з порожнистими волокнами від пружних констант його складників та об'ємного вмісту волокна і порожнини у композиційному матеріалі.

На сьогодні нерозв'язаними залишаються задачі стохастичної гомогенізації волокнистих композитів, фазою яких є порожнисте волокно. Одна з таких задач розв'язується у цій роботі. Розроблена при цьому методика визначення співвідношень для визначення стохастичних характеристик композитів з порожнистими волокнами визначає актуальність цього дослідження.

Побудова ефективного поздовжнього модуля пружності. Для побудови математичної моделі гомогенізованого волокнистого композиту з порожнистим волокном виділимо його представницький елемент, що має транстропні властивості. Він є комбінацією двох трансверсально-ізотропних циліндрів нескінченної довжини, що моделюють відповідно матрицю та порожнисте волокно.

Спочатку виділимо представницький елемент (елементарну комірку) гексагональної форми (рис. 1). Потім перейдемо до циліндричної комірки таким чином, щоб об'ємний вміст волокна в гексагональній комірі й об'ємний вміст волокна в циліндричній комірі були б однаковими.

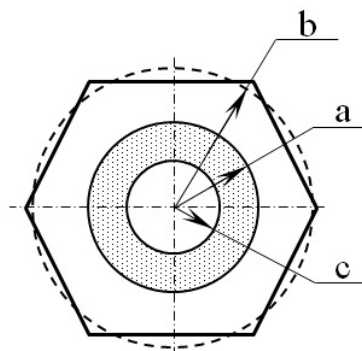


Рис. 1. Схема структури елементарної комірки

Нехай l та g відповідно об'ємний вміст волокна та порожнини в ньому у матеріалі композита. Враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку в ній займає волокно, мають однакову висоту, маємо такі співвідношення:

$$g = \frac{\pi c^2}{\pi b^2} = \frac{c^2}{b^2}, \quad h = \frac{a^2}{b^2}, \quad l = \frac{\pi(a^2 - c^2)}{\pi b^2} = \frac{a^2 - c^2}{b^2} = h - g. \quad (1)$$

Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення порожнистого циліндра ($c < r < a$), що моделює волокно, і порожнистого циліндра ($a < r < b$), що моделює матрицю.

Обмежимося випадком, коли на міжфазній поверхні композита виконуються умови ідеального контакту, тобто умови неперервності радіальних переміщень та напружень:

$$\sigma_r^\circ(a) = \sigma_r^*(a), \quad u_r^\circ(a) = u_r^*(a), \quad (2)$$

осьові переміщення для матриці та волокна співпадають, тобто $u_z^\circ(z) = u_z^*(z)$, а зовнішня поверхня матриці та внутрішня поверхня порожнистого волокна вільні від напружень:

$$\sigma_r^*(b) = 0, \quad \sigma_r^\circ(c) = 0. \quad (3)$$

Тут і далі символ $\circ$ – означає величини, що відносяться до волокна, а символ $*$ – величини, що відносяться до матриці.

Розв'язуючи вісесиметричну крайову задачу про сумісне деформування матриці та порожнистого волокна, визначаємо у них переміщення та напруження.

Далі розв'язується задача визначення компонентів напружено-деформованого стану у разі аналогічного деформування представницької комірки, виготовленої з однорідного трансропного матеріалу. Розв'язуючи цю крайову задачу, визначаємо радіальні та осьові переміщення у точках однорідного представницького елементу. Нехай σ_0° та σ_0^* – розтягувальні напруження, прикладені відповідно до волокна та матриці, σ_0 – відповідно до однорідної комірки. Матимемо однакові умови рівноваги для обох задач, якщо виконується рівність

$$\pi(a^2 - c^2)\sigma_0^\circ + \pi(b^2 - (a^2 - c^2) - c^2)\sigma_0^* = \pi b^2 \sigma_0, \quad (4)$$

$$\sigma_0^\circ(h - g) + \sigma_0^*(1 - h) = \sigma_0. \quad (5)$$

Для визначення поздовжнього модуля пружності однорідного композитного матеріалу, тобто ефективної характеристики E_1 , використаємо умови: рівність осьових переміщень та рівність радіальних переміщень на зовнішній циліндричній поверхні представницького елементу, отримані як розв'язки описаних вище крайових задач. Як показано у монографії [1], метод узгодження розв'язків крайової задачі про сумісне деформування матриці та волокна та крайової задачі про відповідне деформування представ-

ницької циліндричної комірки, виготовленої з однорідного композита, є ефективним методом гомогенізації волокнистого композита.

Використання цього підходу дає можливість отримати ефективний поздовжній модуль пружності $E_1(h, g)$:

$$E_1 = \frac{E_1^*}{\gamma} \left(\frac{(\alpha - E_2^\circ(h - g)(1 + h))(1 - h)d^\circ - (-E_2^\circ(h - g)^2(1 + h)d^* + d^*(h - g)\alpha)}{\gamma} \right), \quad (6)$$

У цьому співвідношенні

$$\alpha = (1 - h)((E_2^*v_{23}^\circ - E_2^\circ v_{23}^*)(h - g) - E_2^*(h + g)),$$

$$\gamma = d^\circ(\alpha - E_2^\circ(h - g)(1 + h)) - 2(h - g)h(v_{21}^\circ E_1^* d^\circ + v_{12}^\circ E_2^\circ d^\circ)v_{21}^*,$$

$$d^\circ = \frac{1}{E_1^\circ} + \frac{\beta}{\alpha - E_2^\circ(1 + h)(h - g)}v_{12}^\circ E_1^*,$$

$$d^* = \frac{1}{E_1^*} + \frac{\beta}{\alpha - E_2^\circ(1 + h)(h - g)}v_{12}^* E_1^\circ,$$

$$\beta = \frac{2h}{E_1^* E_1^\circ} (v_{21}^\circ E_2^*(1 - h) + v_{21}^* E_2^\circ(h - g)).$$

Тут E_1, E_2 – поздовжній та поперечний модулі пружності першого роду, v_{12}, v_{21}, v_{23} – коефіцієнти Пуассона трансропного матеріалу. Формула (6) моделює залежність поздовжнього модуля пружності E_1 для трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит, від пружних характеристик матриці, волокна й об'ємних часток волокна та порожнини.

Визначення математичного сподівання ефективного поздовжнього модуля пружності волокнистого композита за наявності випадкових параметрів волокна. Для розв'язання задачі визначення математичного сподівання ефективних характеристик композита, що є випадковими величинами за наявності стохастичних параметрів їх складників, потрібно спочатку визначити щільність сумісного розподілу цих випадкових параметрів. Розглянемо реалізацію запропонованої методики на прикладі визначення математичного сподівання ефективного поздовжнього модуля пружності волокнистого композита $E_1(h, g)$. Цей показник є функціями випадкових величин, що визначаються випадковими параметрами порожнистого волокна – його внутрішнім та зовнішнім радіусами – c та a (рис. 1):

$$h = \frac{a^2}{b^2}, \quad g = \frac{c^2}{b^2}. \quad (7)$$

На практиці лінійні розміри компонентів композита найчастіше є випадковими величинами з нормальними законами розподілу, що пояснюється тим, що відхилення від встановлених проєктних розмірів у процесі їх виготовлення виникають внаслідок впливу великої кількості незначних факторів, серед яких немає домінуючих за впливом.

Нехай радіуси $a \sim N_a(m_1; \sigma_1)$, $c \sim N_c(m_2; \sigma_2)$, де m_1 та m_2 – математичні сподівання радіусів від-

повідно a та c , σ_1 та σ_2 – середньоквадратичні відхилення, причому $\sigma_1 = \varepsilon_1 m_1$, $\sigma_2 = \varepsilon_2 m_2$, де константи ε_1 та ε_2 визначають максимальні допустимі відхилення у частках проєктних розмірів a та c . Щільності розподілу величин a та c мають вигляд:

$$f_a = \frac{1}{\varepsilon_1 m_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-m_1)^2}{2\varepsilon_1^2 m_1^2}}, f_c = \frac{1}{\varepsilon_2 m_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(c-m_2)^2}{2\varepsilon_2^2 m_2^2}}. \quad (8)$$

Знайдемо щільність розподілу випадкової величини $h = \frac{a^2}{b^2}$, що є функцією випадкової величини a , що має нормальний розподіл. Для нормально розподіленої випадкової величини областю її визначення є вся числова пряма. На ній функція $h(a)$ не є монотонною. На $(-\infty; 0)$ вона є монотонно спадною, на $(0; +\infty)$ монотонно зростає. Оскільки $h(a)$ не монотонна у своїй області визначення аргументу a , тому обернена функція $a = \psi(y)$ є неоднозначною. Розіб'ємо числову пряму на два проміжки $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$, на кожних з яких функція $h(a)$ є монотонною. На кожному з цих інтервалів монотонності знаходимо обернену функцію. На $(-\infty; 0)$ отримуємо:

$$h = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a_1 = -b\sqrt{h}.$$

$$\text{На проміжку } (0; +\infty) \quad h = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a_2 = b\sqrt{h}.$$

Оскільки $h(a)$ не монотонна у своїй області визначення, то її щільність визначається за формулою [9]:

$$f_h = f_a(a_1(h)) \cdot |a_1'(h)| + f_a(a_2(h)) \cdot |a_2'(h)|. \quad (9)$$

$$\text{Знаходимо } a_1'(h) = -\frac{b}{2\sqrt{h}}, a_2'(h) = \frac{b}{2\sqrt{h}}.$$

Для визначення щільності розподілу f_h використаємо формулу (9).

$$\begin{aligned} f_a(a_1(h)) \cdot |a_1'(h)| &= \frac{1}{\varepsilon_1 m_1 \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-b\sqrt{h}-m_1)^2}{2\varepsilon_1^2 m_1^2}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{h}} = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_1 \frac{m_1}{b} \sqrt{2\pi h}} \cdot e^{-\frac{(\sqrt{h} + \frac{m_1}{b})^2}{2\varepsilon_1^2 \frac{m_1^2}{b^2}}} = \frac{1}{2\varepsilon_1 m_h \sqrt{2\pi h}} \cdot e^{-\frac{(\sqrt{h} + m_h)^2}{2\varepsilon_1^2 m_h^2}} \\ f_a(a_2(h)) \cdot |a_2'(h)| &= \frac{1}{\varepsilon_1 m_1 \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b\sqrt{h}-m_1)^2}{2\varepsilon_1^2 m_1^2}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{h}} = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_1 \frac{m_1}{b} \sqrt{2\pi h}} \cdot e^{-\frac{(\sqrt{h} - \frac{m_1}{b})^2}{2\varepsilon_1^2 \frac{m_1^2}{b^2}}} = \frac{1}{2\varepsilon_1 m_h \sqrt{2\pi h}} \cdot e^{-\frac{(\sqrt{h} - m_h)^2}{2\varepsilon_1^2 m_h^2}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{Тут } m_h = \frac{m_1}{b} \text{ і } h > 0.$$

Аналогічним способом отримуємо щільність розподілу випадкової величини $g(c)$:

$$f_g = \frac{1}{2\varepsilon_2 m_g \sqrt{2\pi g}} \cdot \left[e^{-\frac{(\sqrt{g} + m_g)^2}{2\varepsilon_2^2 m_g^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{g} - m_g)^2}{2\varepsilon_2^2 m_g^2}} \right], \quad (11)$$

$$\text{де } m_g = \frac{m_2}{b} \text{ і } g > 0.$$

Випадкові величини $h(a)$ та $g(c)$ є незалежними, оскільки a та c є незалежними випадковими величинами, тому сумісна щільність їх розподілу дорівнює $f_h(h) \cdot f_g(g)$.

Тому математичне сподівання ефективного параметра – поздовжнього модуля пружності, що є випадковою величиною $E_1(h, g)$, визначається за формулою [9]

$$M(E_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dh \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(h, g) f_h(h) f_g(g) dg,$$

а з урахуванням вище введених обмежень будемо мати

$$M(E_1) = \int_0^1 dh \int_0^h E_1(h, g) f_h(h) f_g(g) dg. \quad (12)$$

У технічних розрахунках доцільно використовувати значення $M(E_1)$, що сприятиме підвищенню їх точності.

Розглянемо односпрямований композит UD GFRP на основі поліефірної смоли (Polimal 109), армований скловолнами (Е-скло). Пружні характеристики складників [10]: для волокна маємо $E^0 = 73 \text{ ГПа}$, $\nu^0 = 0,22$, $G^0 = 29,9 \text{ ГПа}$; для матриці $E^* = 3,24 \text{ ГПа}$, $\nu^* = 0,385$.

На рисунках 2–3 представлено залежності математичного сподівання поздовжнього модуля пружності $M(E_1)$ від m_h у діапазоні 0,55...0,75 у разі фіксованих значень m_g та констант ε_1 та ε_2 .

Висновки. Розв'язання задачі гомогенізації волокнистих композитів за умови наявності рівномірної концентричної порожнини у волокні створює передумови для проєктування оптимальних композиційних матеріалів з точки зору їх експлуатаційних та економічних характеристик.

При цьому для створення адекватних математичних моделей гомогенізації потрібно враховувати стохастичний характер багатьох геометричних та фізико-математичних параметрів окремих складників композита. Тому ефективні характеристики композитного матеріалу є функціями цих випадкових величин. Замість задачі визначення ефективних сталей для композитів у цьому випадку приходимо до визначення ефективних характеристик випадкових величин, наприклад, їх математичних сподівань, дисперсій та інших початкових і центральних їх моментів.

У цій роботі розв'язана задача про визначення математичного сподівання ефективного поздовжнього модуля пружності транстропного односпрямованого волокнистого композита з порожнистими волокнами. При цьому випадковими величинами з нормальним законом розподілу моделювались геометричні параметри порожнистого волокна – радіуси волокна та радіуси порожнини. Аналітичний вираз для ефективного поздовжнього модуля

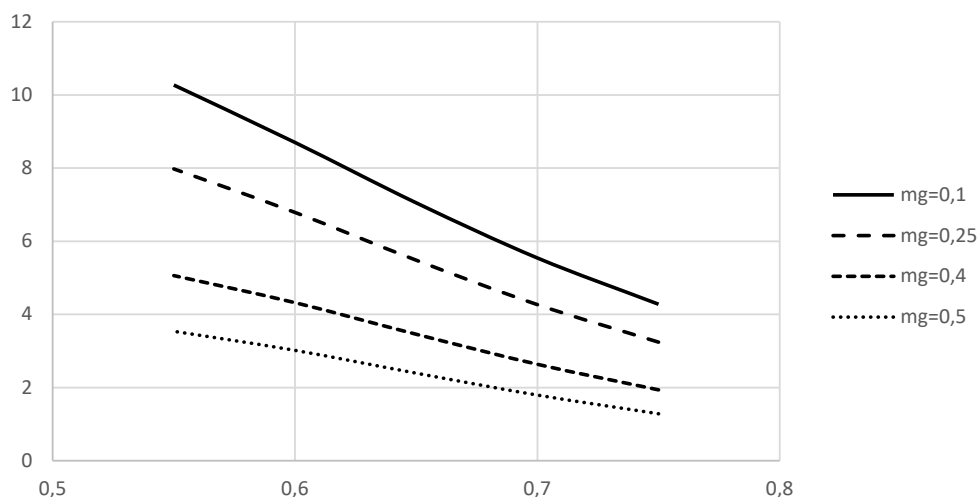


Рис. 2. Залежності математичного сподівання поздовжнього модуля пружності $M(E_1)$ від m_h за фіксованих значень m_g та $\mu = \mu_2 = 0,4$

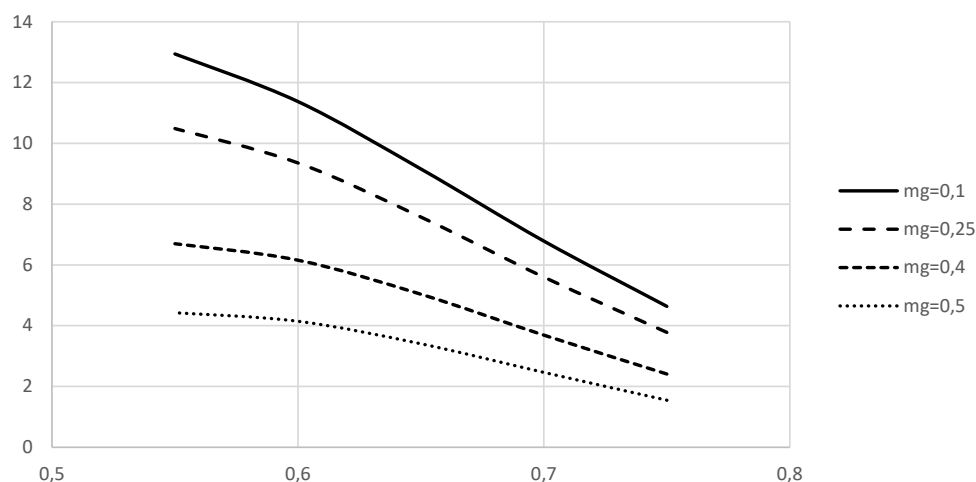


Рис. 3. Залежності математичного сподівання поздовжнього модуля пружності $M(E_1)$ від m_h за фіксованих значень m_g та $\mu = \mu_2 = 0,3$

пружності залежить від об'ємних часток волокна та порожнини у елементарній комірці. Для отримання цієї залежності використано узгодження розв'язків двох крайових задач – задачі про сумісний поздовжній розв'язок матриці та порожнистого волокна та задачі про таке ж деформування елементарної комірки з однорідного композита, механічні характеристики якого потрібно визначити. Оскільки об'ємні частки волокна та порожнини у елементарній комірці є функції випадкових параметрів, то спочатку визначаємо їх щільності розподілу. Це дає змогу отримання розв'язання задачі.

Запропонована реалізація методики визначення стохастичних характеристик ефективних параметрів композитів зі стохастичними компонентами складається з таких етапів: 1) отримання аналітичного виразу для відповідного

ефективного показника у вигляді функцій стохастичних компонентів; 2) ідентифікація розподілів цих випадкових компонентів; 3) знаходження щільності їх сумісного розподілу; 4) отримання формули для знаходження стохастичних характеристик (математичного сподівання, дисперсії, моментів) ефективного показника для композита. Цю формулу у майбутньому доцільно використовувати під час проектування конструктивних елементів, виготовлених з композитних матеріалів.

Перспективи подальших досліджень у цьому напрямі пов'язані з визначенням стохастичних характеристик ефективного поперечного модуля пружності, ефективного модуля зсуву, коефіцієнтів Пуассона транстропного композита з порожнистими волокнами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гребенюк С.М., Гоменюк С.І., Клименко М.І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.
2. Kwon Y.W., Allen D.H., Talreja R. Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures. New York : Springer, 2007. 630 p.
3. Ko Y.-F., Ju J.W. New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223. P. 2437–2458.
4. Zhong W., Pan N. A computer simulation of single fiber pull out process in a composite. *Journal of Composite Materials*. 2003. Vol. 37. № 21. P. 1951–1969.
5. Гребенюк С.М., Клименко М.І. Визначення ефективного модуля пружності композиту при нормальному розподілі модулів пружності волокна та матриці. *Вестник Херсонского национального университета*. Херсон. 2014. № 3(50). С. 254–258.
6. Hrebenuk S., Klymenko M., Omelchenko K. Effective elastic modulus determination of unidirectional composite for stochastic geometric characteristics of fiber. *Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ. 2014. № 1. С. 14–23.
7. Клименко М.І., Гребенюк С.М., Смолянкова Т.М. Визначення ефективного модуля зсуву односпрямованого композита при нормальному розподілі радіуса волокна. *Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ. 2016. № 2. С. 127–136.
8. Homeniuk S., Grebenyuk S., Klimenko M., Stoliarova A. Determining the effective characteristics of a composite with hollow fiber at longitudinal elongation. *Eastern-European Journal*. 6/7 (96). 2018, P. 6–12.
9. Білоцерківський О.В. Теорія ймовірностей і математична статистика : текст лекцій. Харків : «Друкарня Мадрид», 2016. 94 с.
10. Столярова А.В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із транстропними порожнистими волокнами : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2021. 104 с.

REFERENCES

1. Hrebenuk, S.M., Homenyuk, S.I. & Klymenko, M.I. (2019). Napruzhenno-deformovanyi stan prostorovykh konstrukttsii na osnovi homohenizatsii voloknystykh kompozytiv [Stress-strain state of spatial structures based on homogenization of fibrous composites]. Monograph. Kherson: Publishing house “Helvetica” [in Ukrainian].
2. Kwon, Y.W., Allen, D.H. & Talreja, R. (2007). Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures. New York: Springer.
3. Kwon, Y.-F., & Ju, J.W. (2012). New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*, (223), 2437–2458.
4. Zhong, W. & Pan, N. (2003). A computer simulation of single fiber pull out process in a composite. *Journal of Composite Materials*, 37(21), 1951–1969.
5. Hrebenuk, S.M. & Klymenko, M.I. (2014). Determination of composite effective elastic modulus under normal elasticity modulus distribution of fiber and matrix. *Vestnyk Khersonskoho natsionalnoho unyversytetu*, 3(50), 254–258.
6. Hrebenuk, S., Klymenko, M. & Omelchenko, K. (2014). Effective elastic modulus determination of unidirectional composite for stochastic geometric characteristics of fiber. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Matematychnе modelyuvannya i prykladna mekhanika: zbirnyk naukovykh statei. Fyzyko-matematychni nauky*, (1), 14–23.
7. Klymenko, M.I., Hrebenuk, S.M. & Smolyankova, T.N. (2016). Determination of the effective shear modulus of a unidirectional composite at normal fiber radius distribution. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Matematychnе modelyuvannya i prykladna mekhanika: zbirnyk naukovykh statei. Fyzyko-matematychni nauky*, (2), 127–136.
8. Homeniuk, S., Grebenyuk, S., Klimenko, M. & Stoliarova, A. (2018). Determining the effective characteristics of a composite with hollow fiber at longitudinal elongation. *Eastern-European Journal*, 6/7(96), 6–12.
9. Bilotserkivskiy, O.V. (2016). Teoriia ymovirnostei i matematychna statystyka [Probability theory and mathematical statistics]: tekst lekttsii. Kharkiv: «Drukarnia Madryd».
10. Stoliarova, A.V. (2021). Efektyvni mekhanichni kharakterystyky kompozytsiinykh materialiv iz transtropnymy porozhnystymy voloknamy [Effective mechanical characteristics of composite materials with transtropic hollow fibers]: monohrafiia. Kherson: Vydavnychiy dim «Helvetyka».