

УДК 519.86

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-08>

ЕФЕКТИВНІСТЬ МЕТОДУ ІДЕАЛЬНОЇ ТОЧКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Цегелик Г. Г.

*доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0002-4934-3181
hryhoriy.tsehelyk@gmail.com*

Цегелик М. Г.

*директор
ПП «Бінар-2000»
вул. Вербова, 39, Львів, Україна
orcid.org/0009-0004-9413-0769
M.Tsehelyk@gmail.com*

Грипинська Н. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри галузевого машинобудування та агроінженерії
Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна
orcid.org/0000-0003-0103-976X
hrypynskan@khnmu.edu.ua*

Ярецька Н. О.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань
Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна
orcid.org/0000-0002-3726-2878
yaretskano@khnmu.edu.ua*

Ключові слова: методи прийняття рішень, багатокритеріальна оптимізація, метод ідеальної точки, ознака опуклості функцій Сільвестера, метод множників Лагранжа.

У роботі розглянуто метод ідеальної точки, що використовується для розв'язання задач двокритеріальної оптимізації. Еперше доведено, що коли кількість змінних, від яких залежать критерії оптимізації, перевищує дві, цільова функція скаляризованої задачі втрачає опуклість. Це робить неможливим застосування методу множників Лагранжа, оскільки необхідні умови оптимальності не виконуються. Особливістю методу ідеальної точки є те, що він не потребує додаткової інформації від особи, яка приймає рішення, щодо переваги одного критерію над іншим у множині можливих альтернатив. Однак метод базується на припущенні, що існує певний оптимальний розв'язок задачі двокритеріальної оптимізації, який можна знайти шляхом її перетворення на відповідну скаляризовану однокритеріальну задачу. Основний принцип вибору компромісного рішення полягає у визначенні альтернативи, значення якої є найближчим до ідеальної точки в певній

метриці. Таким чином, метод забезпечує можливість отримання наближеного оптимального рішення без потреби у введенні додаткових вагових коефіцієнтів або суб'єктивних оцінок.

Показано, що були спроби розв'язання двокритеріальної задачі оптимізації у сфері планування виробництва продукції у випадку із чотирма змінними. Встановлено, що таку задачу не можна розв'язати методом ідеальної точки. Це пояснюється тим, що умови сідлової точки, які використовуються для перевірки оптимальності, не можуть бути застосовані через відсутність опуклості цільової функції.

Отже, метод ідеальної точки є ефективним для аналізу задач двокритеріальної оптимізації, але його застосування обмежується випадками з кількістю змінних не більше за дві. У складніших задачах із більшою кількістю змінних виникають труднощі, пов'язані з втратою опуклості цільової функції, що унеможлиблює використання класичних методів розв'язування.

Тому подальші дослідження будуть спрямовані на розробку підходів для пошуку альтернативних методів оптимізації (навіть у випадках неопуклих скаляризованих функцій), здатних забезпечити ефективний розв'язок для складних багатокритеріальних задач.

EFFICIENCY OF THE IDEAL POINT METHOD FOR SOLVING TWO-CRITERION OPTIMIZATION PROBLEMS

Tsegelyk H. H.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Head of the Department of Mathematical Modeling of Socio-Economic Processes
Ivan Franko Lviv National University
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/ 0000-0002-4934-3181
hryhoriy.tsehelyk@gmail.com*

Tsegelyk M. H.

*Director
Private Enterprise "Binar-2000"
Verbova str., 39, Lviv, Ukraine
orcid.org/0009-0004-9413-0769
M.Tsehelyk@gmail.com*

Hrypynska N. V.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Industrial Mechanical Engineering
and Agricultural Engineering
Khmelnyskyi National University
Instytutska str., 11, Khmelnyskyi, Ukraine
orcid.org/0000-0003-0103-976X
hrypynskan@khnmu.edu.ua*

Yarets'ka N. O.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics
and Computer Applications
Khmelnyskyi National University
Instytutska str., 11, Khmelnyskyi, Ukraine
orcid.org/0000-0002-3726-2878
yaretskano@khnmu.edu.ua*

Key words: decision-making methods, multi-criteria optimization, ideal point method, Sylvester function convexity test, Lagrange multiplier method.

The paper considers the ideal point method for solving two-criteria optimization problems. It is proven for the first time that when the number of variables on which the optimization criteria depend exceeds two, the objective function of a scalar problem loses convexity. This makes it impossible to use the Lagrange multiplier method, since the necessary optimality conditions are not met.

A feature of the ideal point method is that it does not require additional information from the decision-maker regarding the preference of one criterion over another in the set of possible alternatives. However, the method is based on the assumption that there is a certain optimal solution to the two-criteria optimization problem, which can be found by transforming it into the corresponding scalar single-criteria problem. The basic principle of choosing a compromise solution is to determine the alternative whose value is closest to the ideal point in a certain metric. Thus, the method provides the possibility of obtaining an approximate optimal solution without the need to introduce additional weighting factors or subjective estimates.

It is shown that there have been attempts to solve a two-criteria optimization problem in the field of production planning in the case of four variables. It has been established that such a problem cannot be solved using the ideal point method. This is explained by the fact that the saddle point conditions used to check optimality cannot be applied due to the lack of convexity of the objective function.

So, the ideal point method is effective for analyzing two-criteria optimization problems, but its application is limited to cases with the number of variables not exceeding two. In more complex problems with a larger number of variables, difficulties arise due to the loss of convexity of the objective function, which makes it impossible to use classical solution methods.

Therefore, further research will be aimed at developing approaches that will allow the search for alternative optimization methods (in cases of non-convex scalar functions) capable of providing an effective solution for complex multi-criteria problems.

Вступ. Математичні методи планування й оптимізації відіграють ключову роль у сучасному менеджменті, економіці та управлінні. Вони не лише сприяють зменшенню ризиків під час ухвалення рішень, але й допомагають максимізувати прибутки, знижувати витрати й ефективно розподіляти ресурси. Основою цих методів є математичне моделювання, яке дає змогу представити реальні проблеми у вигляді математичних задач, розв'язання яких забезпечує знаходження оптимальних та ефективних рішень.

Об'єктом цього дослідження є процес розв'язання задач двокритеріальної оптимізації за допомогою методу ідеальної точки.

Метою дослідження є аналіз ефективності методу ідеальної точки в розв'язанні задач двокритеріальної оптимізації та визначення його обмежень, пов'язаних із втратою опуклості цільової функції зі збільшенням кількості змінних.

Гіпотезами дослідження є те, що метод ідеальної точки дає можливість отримати компромісне рішення у двокритеріальних задачах оптимізації без потреби у введенні вагових коефіцієнтів або суб'єктивних оцінок; за умови, якщо кількість змінних у задачі перевищує дві, то скаляризована цільова функція втрачає опуклість, що унеможливує застосування методу множників Лагранжа; для випадку складних багатокритеріальних задач

(з більш ніж двома змінними) необхідні альтернативні методи оптимізації, здатні враховувати неопуклість цільової функції.

Огляд літератури. Метод ідеальної точки для розв'язування двокритеріальних задач оптимізації розглянутий в [1; 2, с. 170–173]. В [1] та в окремих публікаціях, наприклад [3], цей метод детально розглянутий у випадку двокритеріальних задач з двома змінними, адже, як буде показано в роботі, за більшої кількості змінних цільова функція скаляризованої задачі втрачає опуклість і для розв'язання таких задач методом ідеальної точки не можна використати класичний метод множників Лагранжа. Близькими роботами до цього дослідження є праці [4; 5]. У дослідженні авторів використані методи, опубліковані в праці [6, с. 247, с. 259]. Також спроба розв'язати двокритеріальну задачу оптимізації із чотирма змінними була опублікована в праці [7, с. 46–49].

Методи. У [1; 2, с. 170–173] розглядається метод ідеальної точки, який можна використати для розв'язування двокритеріальних задач оптимізації. Цей метод не використовує допоміжну інформацію від особи, яка приймає рішення, про наявність переваги одного з критеріїв на множині альтернатив. Однак робиться припущення про наявність так званого оптимального розв'язку задачі двокритеріальної оптимізації, який може бути знайдений шляхом

перетворення двокритеріальної задачі у відповідно скаляризовану однокритеріальну задачу.

Якщо на множині альтернатив M

$$\max f_1(X) = A_1, \max f_2(X) = A_2,$$

то ідеальною називається точка (A_1, A_2)

Правило вибору компромісу в цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, що має оцінку, яка є найближчою до ідеальної точки в деякій метриці.

Нами розглядається пошук компромісної альтернативи як розв'язок скаляризованої задачі

$$(f_1(X) - A_1)^2 + (f_2(X) - A_2)^2 \rightarrow \min$$

на множині альтернатив.

Наприклад, якщо розв'язувати задачу [3, с. 24–28]

$$f_1(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

$$f_2(X) = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

то ідеальною є точка $(12, 12)$ і розв'язок задачі зводиться до відшукування мінімуму функції

$$L = (2x_1 + 3x_2 - 12)^2 + (3x_1 + x_2 - 12)^2 \rightarrow \min$$

на множині альтернатив.

Покажемо, що якщо

$$f_1(X) = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3,$$

$$f_2(X) = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3,$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ будь-які числа, то цільова функція скаляризованої задачі не є опуклою.

Справді позначимо через L цільову функцію скаляризованої задачі, тоді

$$L = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - A_1)^2 + (a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - A_2)^2,$$

Знайдемо частинні похідні від функції L , одержимо:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2a_1(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - A_1) + 2a_2(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - A_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2b_1(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - A_1) + 2b_2(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - A_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2c_1(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - A_1) + 2c_2(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - A_2).$$

Тоді для частинних похідних другого порядку одержуємо значення:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2(a_1^2 + a_2^2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 2(a_1b_1 + a_2b_2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 2(a_1c_1 + a_2c_2);$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 2(a_1b_1 + a_2b_2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2(b_1^2 + b_2^2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 2(b_1c_1 + b_2c_2);$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} = 2(c_1a_1 + c_2a_2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} = 2(c_1b_1 + c_2b_2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = 2(c_1^2 + c_2^2).$$

Складемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

Підставляючи замість похідних їх значення, одержуємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(a_1^2 + a_2^2) & 2(a_1b_1 + a_2b_2) & 2(a_1c_1 + a_2c_2) \\ 2(b_1a_1 + b_2a_2) & 2(b_1^2 + b_2^2) & 2(b_1c_1 + b_2c_2) \\ 2(c_1a_1 + c_2a_2) & 2(c_1b_1 + c_2b_2) & 2(c_1^2 + c_2^2) \end{vmatrix}$$

Тоді

$$\Delta = 8[(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)(c_1^2 + c_2^2) + 2(a_1b_1 + a_2b_2)(a_1c_1 + a_2c_2)(b_1c_1 + b_2c_2) - (a_1^2 + a_2^2)(b_1c_1 + b_2c_2)^2 - (b_1^2 + b_2^2)(a_1c_1 + a_2c_2)^2 - (c_1^2 + c_2^2)(a_1b_1 + a_2b_2)^2].$$

Розкривши дужки і звівши подібні члени, одержуємо, що $\Delta = 0$.

Результати. Уперше проведене дослідження означає, що цільова функція L згідно з ознакою Сільвестера [4, с. 247] не є опуклою, тобто застосувати метод множників Лагранжа [4, с. 259] в цьому випадку не можна. Задачу не можна розв'язати методом ідеальної точки.

Визначник $\Delta = 0$ і тоді, коли кількість змінних функцій $f_1(X)$ та $f_2(X)$ перевищує три. Це означає, що цільова функція скаляризованої задачі в такому випадку також не є опуклою, тому застосувати метод множників Лагранжа для розв'язування таких задач не можна. Такі задачі не мають розв'язку методом ідеальної точки.

Слід зауважити, що відомі спроби розв'язати двокритеріальну задачу оптимізації з кількістю змінних, що перевищує дві. Так, наприклад, в [5, с. 46–49] розглядається двокритеріальна задача планування виробництва продукції із чотирма змінними. Цільова функція скаляризованої задачі в цьому випадку має вигляд:

$$L = (2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 190)^2 + (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 275)^2 \rightarrow \min.$$

Оскільки

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4(2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 190) + 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 275),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 6(2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 190) + 4(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 275),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2(2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 190) + 6(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 275),$$

то

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 10, \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 16, \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 10;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 16, \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 26, \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 18;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} = 10, \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} = 18, \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = 20,$$

тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 16 & 10 \\ 16 & 26 & 18 \\ 10 & 18 & 20 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 8 & 13 & 9 \\ 5 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 8(650 + 720 - 325 - 405 - 640) = 0.$$

Отже, представлена в дослідженні задача не має розв'язку. Умови сідлової точки записані, проте їх не можна використати у зв'язку з тим, що цільова функція скаляризованої задачі не є опуклою.

Висновки. Метод ідеальної точки є ефективним для аналізу задач двокритеріальної оптимі-

зації, але його застосування обмежується випадками, що передбачають не більше ніж дві змінні. У складніших задачах із більшою кількістю змінних виникатимуть труднощі, пов'язані з втратою опуклості цільової функції, що унеможливило використання класичних методів розв'язування.

Тому подальші дослідження матимуть вектор спрямування на розробку підходів для пошуку альтернативних методів оптимізації. Це стосуватиметься також випадків неопуклих скаляризованих функцій, що здатні забезпечити ефективний розв'язок для складних багатокритеріальних задач. А розв'язок таких задач є необхідним елементом підвищення ефективності управлінських рішень у багатьох галузях науки та промисловості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Волошин О. Ф., Машченко С. О. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посібник. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2010. 336 с.
2. Катренко А. В., Пасічник В. В., Пасько В. П. Теорія прийняття рішень : підручник. Київ : Видавнича група BHV, 2009. 448 с.
3. Цегелик Г. Г., Цегелик М. Г. Використання методу ідеальної точки для розв'язування задачі планування виготовлення продукції. *Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції «Соціально-економічний розвиток у контексті викликів сьогодення»*, 26.06.2024, Одеса, Україна. С. 24–28.
4. Тимофеева Н. К. Математичні моделі та підходи до розв'язання оптимізаційних задач штучного інтелекту. *Прикладні питання математичного моделювання*. № 4 (1), 2021. С. 224–230. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.24>.
5. Кирилов С. О., Кирилова Л. О., Юрій Р. Ф. Застосування роєвого та еволюційного алгоритму для вирішення дворівневих задач оптимізації. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. № 44 (1), 2024. С. 128–137. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).128-137](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).128-137).
6. Цегелик Г. Г. Математичне програмування : навчальний посібник. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. 338 с.
7. Marko M. Using the method of ideal point to solve dual-objective problem for production scheduling. *Scientific journal "ScienceRise"*. Vol. 7. No. 1(24), 2016. P. 46–49.

REFERENCES

1. Voloshyn, O.F., & Mashchenko, S.O. (2010). Modeli ta metody pryiniattia rishen: Navchalnyi posibnyk [Models and methods of decision-making: Textbook]. VPC "Kyivskyi universytet" [in Ukrainian].
2. Katrenko, A.V., Pasichnyk, V.V., & Pasko, V.P. (2009). Teoriia pryiniattia rishen: pidruchnyk [Decision-making theory: Textbook]. Vydavnycha hrupa BHV [in Ukrainian].
3. Tsehelyk, H.H., & Tsehelyk, M.H. (2024, June 26). Vykorystannia metodu idealnoi tochky dlia rozv'iazuvannia zadachi planuvannia vyhotovlennia produktsii [Application of the ideal point method for solving the production planning problem]. In Proceedings of the 2nd International Scientific and Practical Conference "Social and Economic Development in the Context of Today's Challenges" (pp. 24–28). Odesa, Ukraine [in Ukrainian].
4. Tymofeeva, N.K. (2021). Matematychni modeli ta pidkhody do rozv'iazannia optymizatsiinykh zadach shtuchnoho intelektu [Mathematical models and approaches to solving optimization problems in artificial intelligence]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*, 4 (1), 224–230 [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.24>.
5. Kyrylov, S.O., Kyrylova, L.O., & Yurii, R.F. (2024). Zastosuvannia roievoho ta evoliutsiinoho alhorytmu dlia vyrishennia dvorivnyvnykh zadach optymizatsii [Application of swarm and evolutionary algorithms for solving two-level optimization problems]. *Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Seriia "Matematyka i informatyka"*, 44 (1), 128–137 [in Ukrainian]. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).128-137](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).128-137).
6. Tsehelyk, H.H. (2011). Matematychnе prohramuвання: Navchalnyi posibnyk [Mathematical programming: Textbook]. Ivan Franko National University of Lviv [in Ukrainian].
7. Marko, M. (2016). Using the method of ideal point to solve dual-objective problem for production scheduling. *Scientific journal "ScienceRise"*, 7, 1 (24), 46–49 [in English].