

ISSN 2786-6254 (Print)
ISSN 2786-6262 (Online)

Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

Заснований
у 1997 р.

Реєстрація суб'єкта у сфері друкованих медіа: Рішення
Національної ради України з питань телебачення
і радіомовлення № 2607 від 29.08.2024 року.

Computer Science and Applied Mathematics

Адреса редакції:
вул. Університетська 66, корп. 1, ауд. 21(б),
м. Запоріжжя, Україна, 69060

Телефон
для довідок:
+38 066 53 57 687

№ 1, 2025



Видавничий дім
«Гельветика»
2025

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Internet вченою радою ЗНУ (протокол засідання № 10 від 29.04.2025 р.)

На підставі Наказу Міністерства освіти і науки України № 886 від 02.07.2020 р. (додаток 4) збірник включено до Переліку наукових фахових видань України категорії «Б» у галузі знань інформаційні технології (F1 – Прикладна математика, F2 – Інженерія програмного забезпечення, F3 – Комп'ютерні науки).

До 25 березня 2021 р. журнал виходив під назвою «Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки».

У зв'язку зі зміною назви журналу було внесено відповідні зміни до Переліку наукових фахових видань України на підставі Наказу Міністерства освіти та науки України № 735 від 29.06.2021 р. (додаток 3).

Журнал індексується в міжнародній наукометричній базі даних Index Copernicus

Статті у виданні перевірені на наявність плагіату за допомогою програмного забезпечення StrikePlagiarism.com від польської компанії Plagiat.pl.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Гоменюк С. І.	–	доктор технічних наук, професор, головний редактор (Україна)
Гребенюк С. М.	–	доктор технічних наук, професор (Україна)
Гришак В. З.	–	доктор технічних наук, професор (Україна)
Єрмолаєв В. А.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Кеберле Н. Г.	–	кандидат технічних наук, доцент (Україна)
Клименко М. І.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Козін І. В.	–	доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
Кудін О. В.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Панасенко Є. В.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Стеганцев Є. В.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Чопоров С. В.	–	доктор технічних наук, професор (Україна)
Шило Г. М.	–	доктор технічних наук, доцент (Україна)
Breslavsky I.	–	PhD in Mechanics, Docent (Канада)
Djakon R.	–	Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician (Латвія)
Gerasimov T.	–	PhD in Mathematics, Docent (Німеччина)
Kolakowski Z.	–	Doctor of Science in Engineering, Professor (Польща)
Нарзуллаєв У. Х.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Узбекистан)
Швидка С. П.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Словаччина)

ЗМІСТ

РОЗДІЛ I. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Ausheva N. M., Sydorenko Iu. V., Demchyshyn A. A., Kaleniuk O. S. <i>CONSTRUCTING PERIODIC CURVES WITH AN EXPONENTIAL-ALGEBRAIC HYBRID INTERPOLATING POLYNOMIAL</i>	5
Гришак В. З., Руденко Д. О. <i>ДИНАМІКА ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗМІННИМИ ЗА ЧАСОМ ПАРАМЕТРАМИ ТА НЕЛІНІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ ДЕМПФУВАННЯ У РАЗІ НАЯВНОСТІ ЛОКАЛІЗОВАНОГО ЗОВНІШНЬОГО ЗБУРЕННЯ</i>	12
Дугієнко О. Е., Д'яченко Н. М. <i>ЗАДАЧА ПРО ЗНОШУВАННЯ ОСНОВИ ВІНКЛЕРІВСЬКОГО ТИПУ ПРЯМОКУТНИМ У ПЛАНІ ШТАМПОМ ЗА СТЕПЕНЕВОГО ЗАКОНУ ЗНОШУВАННЯ</i>	19
Pasichnyk A. N., Ripa M. Ur. <i>APPLICATION OF LAGUERRE-VORONOI DIAGRAMS FOR CONSTRUCTION AND OPTIMIZATION OF THE EMERGENCY NOTIFICATION SYSTEM INFRASTRUCTURE FOR THE POPULATION</i>	33
Рожок Л. С., Крук Л. А., Ісаєнко Г. Л. <i>ЗАДАЧА ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРИШАРОВИХ СУЦІЛЬНИХ ЦИЛІНДРІВ ІЗ НЕПЕРЕРВНО-НЕОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ЗА РІЗНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ТОРЦЯХ</i>	41
Слободян М. С., Звізло І. С., Білаш О. В., Смаль О. В. <i>ЗГИН ПЛАСТИНИ З ПРУЖНОЮ КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРИЩИНОЮ ВСЕРЕДИНІ ШАЙБИ ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ</i>	48
Спиця О. Г., Гоменюк С. І., Кудін О. В., Столярова А. В. <i>ГОМОГЕНІЗАЦІЯ ТРАНСТРОПНОГО КОМПОЗИТА З ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПОРОЖНИННОГО ВОЛОКНА</i>	55
Цегелик Г. Г., Цегелик М. Г., Грипинська Н. В., Ярецька Н. О. <i>ЕФЕКТИВНІСТЬ МЕТОДУ ІДЕАЛЬНОЇ ТОЧКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ</i>	63

РОЗДІЛ II. ІНЖЕНЕРІЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Вакалюк Т. А., Талавер О. В., Марцева Л. А., Мінтій І. С., Жиляєв Є. В. <i>РОЗРОБКА ПРОТОТИПУ ДОДАТКА ВИЯВЛЕННЯ АНОМАЛІЙ ШЛЯХОМ ВІДСТЕЖЕННЯ ПОДІЙ У РОЗПОДІЛЕНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ НА ПРИКЛАДІ БАНКІВСЬКОЇ СИСТЕМИ СПОВІЩЕНЬ</i>	68
Skakovskiy V. O., Savitskiy R. S., Fant M. O. <i>METHODS AND ALGORITHMS FOR ANOMALY DETECTION</i>	80

РОЗДІЛ III. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

Байдур О. В. <i>МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ РИЗИКІВ КІБЕРБЕЗПЕКИ У РАЗІ ВІДСУТНОСТІ ФІНАНСОВИХ ДАНИХ ПРО ВТРАТИ</i>	89
Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Панасенко Є. В. <i>ВЕБРЕАЛІЗАЦІЯ ПОСТПРОЦЕСОРА З ВІДКРИТИМ ПОЧАТКОВИМ КОДОМ</i>	104
Zhukov O. O., Horbenko V. I. <i>OPTIMIZING OBJECT DETECTION PERFORMANCE THROUGH IMAGE ENHANCEMENT FOR BEE IMAGES</i>	111
Лебедєва-Дичко А. С. <i>АРХІТЕКТУРА СИСТЕМ ПОЗИЦІОНУВАННЯ ОБ'ЄКТІВ НА БУДІВЕЛЬНИХ МАЙДАНЧИКАХ</i>	119
Чузов Д. В., Чопорова О. В. <i>ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ЧЕРГ ТА ІМОВІРНІСНОГО АНАЛІЗУ В АВТОМАТИЗОВАНОМУ ТЕСТУВАННІ ВЕБЗАСТОСУНКІВ</i>	128

CONTENTS

SECTION I. APPLIED MATHEMATICS

Ausheva N. M., Sydorenko Iu. V., Demchyshyn A. A., Kaleniuk O. S. CONSTRUCTING PERIODIC CURVES WITH AN EXPONENTIAL-ALGEBRAIC HYBRID INTERPOLATING POLYNOMIAL.....	5
Gristchak V. Z., Rudenko D. O. DYNAMICS OF AN ELASTIC SYSTEM WITH TIME-VARYING PARAMETERS AND A NONLINEAR DAMPING FUNCTION IN THE PRESENCE OF A LOCALIZED EXTERNAL DISTURBANCE.....	13
Dugienko O. E., Dyachenko N. M. THE PROBLEM OF WEARING A WINKLEER-TYPE FOUNDATION WITH A RECTANGULAR PLAN PUNCH ACCORDING TO THE POWER LAW OF WEAR....	20
Pasichnyk A. N., Ripa M. Ur. APPLICATION OF LAGUERRE-VORONOI DIAGRAMS FOR CONSTRUCTION AND OPTIMIZATION OF THE EMERGENCY NOTIFICATION SYSTEM INFRASTRUCTURE FOR THE POPULATION.....	33
Rozhok L. S., Kruk L. A., Isaenko H. L. STRESS STATE PROBLEM OF THREE-LAYERED SOLID CYLINDERS WITH CONTINUOUSLY NONHOMOGENEOUS FILLER UNDER DIFFERENT END BOUNDARY CONDITIONS	42
Slobodian M. S., Zvizlo I. S., Bilash O. V., Smal O. V. BENDING OF THE PLATE WITH AN ELASTIC CIRCULAR WASHER AND A RADIAL CRACK INSIDE THE WASHER CONSIDERING THE STRIP CONTACT OF ITS EDGES.....	49
Spytsia O. H., Homeniuk S. I., Kudin O. V., Stoliarova A. V. HOMOGENIZATION OF A TRANSTROPIC COMPOSITE WITH RANDOM PARAMETERS OF A HOLLOW FIBER.....	56
Tsegelyk H. H., Tsegelyk M. H., Hrypynska N. V., Yarets'ka N. O. EFFICIENCY OF THE IDEAL POINT METHOD FOR SOLVING TWO-CRITERION OPTIMIZATION PROBLEMS.....	64

SECTION II. SOFTWARE ENGINEERING

Vakaliuk T. A., Talaver O. V., Martseva L. A., Mintiy I. S., Zhylyayev E. V. DEVELOPMENT OF A PROTOTYPE APPLICATION FOR ANOMALY DETECTION BY TRACKING EVENTS IN DISTRIBUTED COMPUTER SYSTEMS ON THE EXAMPLE OF A BANKING NOTIFICATION SYSTEM.....	70
Skakovskiy V. O., Savitskiy R. S., Fant M. O. METHODS AND ALGORITHMS FOR ANOMALY DETECTION.....	80

SECTION III. COMPUTER SCIENCES

Baidur O. V. MATHEMATICAL MODEL FOR CYBERSECURITY RISK ASSESSMENT IN THE ABSENCE OF FINANCIAL DATA ON LOSSES.....	90
Homeniuk S. I., Grebenyuk S. M., Panasenko Y. V. WEB IMPLEMENTATION THE POSTPROCESSOR WITH AN OPEN-SOURCE CODE.....	105
Zhukov O. O., Horbenko V. I. OPTIMIZING OBJECT DETECTION PERFORMANCE THROUGH IMAGE ENHANCEMENT FOR BEE IMAGES.....	111
Lebedieva-Dychko A. S. ARCHITECTURE OF POSITIONING SYSTEMS FOR OBJECTS N CONSTRUCTION SITES.....	120
Chuzov D. V., Choporova O. V. USING QUEUE THEORY AND PROBABILITY ANALYSIS IN AUTOMATED WEB APPLICATION TESTING.....	129

РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

UCD 004.94

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-01>

CONSTRUCTING PERIODIC CURVES WITH AN EXPONENTIAL-ALGEBRAIC HYBRID INTERPOLATING POLYNOMIAL

Ausheva N. M.

*Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of Digital Technologies in Energy
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
Beresteyskyi Avenue, 37, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0003-0816-2971
nataauscheva@gmail.com*

Sydorenko Iu. V.

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Digital Technologies in Energy
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
Beresteyskyi Avenue, 37, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-1953-0410
suliko6786@gmail.com*

Demchyshyn A. A.

*Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor at the Department of Digital Technologies in Energy
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
Beresteyskyi Avenue, 37, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-7754-0185
a.demchyshyn@lil.kpi.ua*

Kaleniuk O. S.

*Candidate of Technical Sciences,
Senior Lecturer at the Department of Digital Technologies in Energy
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
Beresteyskyi Avenue, 37, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0009-0009-3141-4840
o.kaleniuk@kpi.ua*

Key words: interpolation, tangent vectors, Fourier polynomial, numeric optimization, continuous optimization, periodic curve, closed curve.

By “periodic” we mean a parametric curve that replicates itself on some predefined period up to a translation. A good example of a parametric curve is a helix. The domain of the function that sets the parametric curve is real numbers, the codomain is then points in n -dimensional space. The period can be an arbitrary number, but from now on in this work we’ll always presume that the period is 2π .

In this work, we propose a way to construct a periodic curve that goes through a set of predefined points and, while doing so, provides additional control over its shape. To build such a periodic curve, we use an exponential-algebraic

hybrid polynomial that is partially similar to the Fourier polynomial in complex exponential notation. The difference is that the hybrid polynomial we propose also has algebraic terms, moreover while exponential terms inherently require imaginary numbers as their input, the algebraic terms do not. This polynomial interpolates a set of complex numbers, each assigned to a single real parameter. The real parts of the complex data points constitute the points in n -dimensional space the target curve passes through, while the imaginary parts of the same data points affect the shape of the curve without compromising the interpolating properties of the polynomial in real numbers.

In this way, we effectively split our input in two. The “curve goes through the points” conditions are set by the real parts of the complex input data points, and we can then use the imaginary parts to control the curve’s shape. An example of such control is minimizing the curve’s length on a given parameter range.

ПОБУДОВА ПЕРІОДИЧНИХ КРИВИХ КОМБІНОВАНИМ ЕКСПОНЕНЦІЙНО-АЛГЕБРАІЧНИМ ІНТЕРПОЛЮЮЧИМ ПОЛІНОМОМ

Аушева Н. М.

*доктор технічних наук, професор,
завідуюча кафедри цифрових технологій в енергетиці
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Берестейський проспект, 37, Київ, Україна
orcid.org/0000-0003-0816-2971
nataauscheva@gmail.com*

Сидоренко Ю. В.

*кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри цифрових технологій в енергетиці
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Берестейський проспект, 37, Київ, Україна
orcid.org/0000-0002-1953-0410
suliko6786@gmail.com*

Демчишин А. А.

*кандидат технічних наук,
доцент кафедри цифрових технологій в енергетиці
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Берестейський проспект, 37, Київ, Україна
orcid.org/0000-0001-7754-0185
a.demchyshyn@lil.kpi.ua*

Каленюк О. С.

*кандидат технічних наук,
старший викладач кафедри цифрових технологій в енергетиці
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Берестейський проспект, 37, Київ, Україна
orcid.org/0009-0009-3141-4840
o.kaleniuk@kpi.ua*

Ключові слова: інтерполяція, дотичні вектори, поліном Фур'є, чисельна оптимізація, неперервна оптимізація, періодична крива, замкнена крива.

Під «періодичною» кривою матимемо на увазі криву, що повторює себе на певному періоді з точністю до переносу. Прикладом такої кривої є гвинтова лінія. Доменом функції, яка задає таку параметричну криву, є множина дійсних чисел, а кодоменом – множина всіх точок n -вимірного простору. Періодом такої кривої може бути будь-яке довільне дійсне число, але тут і надалі вважатимемо періодом періодичної кривої 2π .

У цій роботі пропонується спосіб побудови періодичної кривої, що проходить через наперед задану множину точок і водночас забезпечує додатковий контроль за формою. Для побудови такої кривої використовується комбінований експоненційно-алгебричний поліном, частково подібний до поліному Фур'є в експоненційному записі. Різниця між запропонованим поліномом і поліномом Фур'є полягає у тому, що комбінований поліном містить разом з експоненційними і алгебричними членами, причому, якщо експоненційні члени потребують уявного аргументу, алгебричні приймають аргумент у дійсному просторі. Такий поліном інтерполює множину комплексних чисел, призначених до унікальних значень дійсного параметра. Дійсні частки таких чисел відповідають точкам кривої у дійсному просторі, через які крива проходить, а уявні – впливають на форму кривої не віднімаючи умови проходження через задані точки завдяки інтерполяційним властивостям полінома.

У такий спосіб вхідні дані фактично розділяються на дві множини. Умова проходження кривої через задані точки задається дійсними частками вхідних даних, а уявні частки тих чисел додатково впливають на форму кривої. У просторі уявних часток вхідних даних можлива чисельна оптимізація певних властивостей кривої, наприклад мінімізації довжини кривої на параметричному інтервалі її періоду.

Literature review. For the most practical applications, the problem of periodic curves construction narrows down to several distinct types of curves: helical polynomial space curves as a special case of Pythagorean-hodograph curves [1], slant helix curves [2; 3] or conical geodesic curves [4]. This specialization is attributed to the properties of helical curves we want to sustain for instance the constant precession [5].

For the more generic periodic curves, it is often practical to use splines which can also preserve some desirable geometric invariants. For instance, rational splines can represent circles exactly [6; 7] and a circle is a special case of a periodic curve. Also, there are splines based on Pythagorean-hodograph curves [8] that can be used for periodic curve construction as well.

For the most generic periodic curves, when no specific invariants are expected to hold and no regularity of smoothness only the C^n continuity is necessary, we can also use non-uniform rational basis splines [9], or any rational or even polynomial splines at all, and emulate the periodicity by replicating the same curve segment with the same translation for as long as needed.

Introduction. In our earlier paper [10] we proposed the following polynomial for constructing closed curves with given properties:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{ikx}.$$

When x is real, the exponential argument in every polynomial term is the real x multiplied by a real

number k and imaginary entity i , therefore, becoming fully imaginary. Then by Euler's formula, the polynomial decomposes into a set of sinusoids and cosinusoids, therefore becoming a periodic function. The coefficients a_k , however, are complex.

This polynomial can be interpolating for a set of exactly $(n + 1)$ distinctive data points (t, p) where t is a real number, and p is complex. This polynomial is equivalent to the Fourier polynomial only of $2n + 1$ members where the constant term is also a complex number. Normally, this Fourier polynomial would have been excessive for $n + 1$ points interpolation, but by splitting the input into real and imaginary parts, we only use the real part as interpolating data, and we retain the control over the imaginary part to have additional controls over the interpolating function.

The interpolating polynomial is then used to build the curve that both goes through a set of points and allows additional control over its properties. This additional control is valuable in practice. The main goal of the current work is to extend the proposed solution from closed curves to open periodic ones.

The auxiliary goal of this work is to explore whether optimizing the curve shape by minimizing its length in complex space can help approach the construction of minimal periodic surfaces. We use numeric methods, so we wouldn't expect true minimal surfaces to emerge but only some reasonable approximations.

Methods. We use the analytic method to build interpolating polynomials along with their derivatives

in real numbers but continuous numeric optimization in imaginary parts of the input data points to optimize non-interpolating properties. Translated into geometric terms, we grant that the curve passes exactly through the selected points and has exact tangent vectors in them, but other properties, such as curve length, are only optimized as far as numeric methods let us. Consequently, this means that the curve length is not granted to be minimal but only not larger than it would appear without numeric optimization.

We collect the evidence for the proposed solution with computational experiments and use statistical analysis to process the results. For the specific methodology regarding the minimal surface construction, please refer to the corresponding section of the paper.

The exponential-algebraic hybrid interpolating polynomial

Using the periodic exponential polynomial, we can construct closed curves with predefined properties. Closed curves are periodic too, but they replicate themselves on a certain period without any translation. To introduce this translation, we need to add non-periodic algebraic terms to our interpolating polynomial. In this paper, we propose to add two algebraic members: a_1x and a_0 . The exponential-algebraic hybrid polynomial will then look like this:

$$P(x) = \sum_{k=2}^n a_k e^{ikx} + a_1x + a_0.$$

Some other problems might require adding other members of different powers, but for adding the translation to the curve, linear members are enough. Also, the a_0 member is just a constant and it's equivalent to $a_k e^{ikx}$ when $k = 0$, so it's also present in the original polynomial so calling it algebraic and not a Fourier member is ambiguous.

To construct a periodic curve with this polynomial, we define m points in space: (x_j, y_j, z_j) , $j = 1..m$ and associate their respective parameter values on a target curve t_j , $j = 1..m$. Then by interpolating this data set one coordinate at a time, we get a triplet of polynomials that set the points of a curve $P(t) = (P_x(t), P_y(t), P_z(t))$. The interpolation conditions are as follows:

$$\begin{aligned} P_x(t_j) &= x_j, j = 1..m, \\ P_y(t_j) &= y_j, j = 1..m, \\ P_z(t_j) &= z_j, j = 1..m. \end{aligned}$$

Each of the coordinates gives us a system of linear equations. If $m = n + 1$, then each of the systems, given that none of the points are assigned to the same parameter value, has a unique solution. These solutions constitute the coefficients for the hybrid polynomials: $P_x(t)$, $P_y(t)$, and $P_z(t)$.

The curve $P(t) = (P_x(t), P_y(t), P_z(t))$ is periodic, but in general case isn't closed. To be closed, it would need to have the a_1 coefficient for every per-coordinate polynomial equal to zero. An example of an open periodic curve (constructed in 2D space for ease of visualization) is shown in Figure 1.

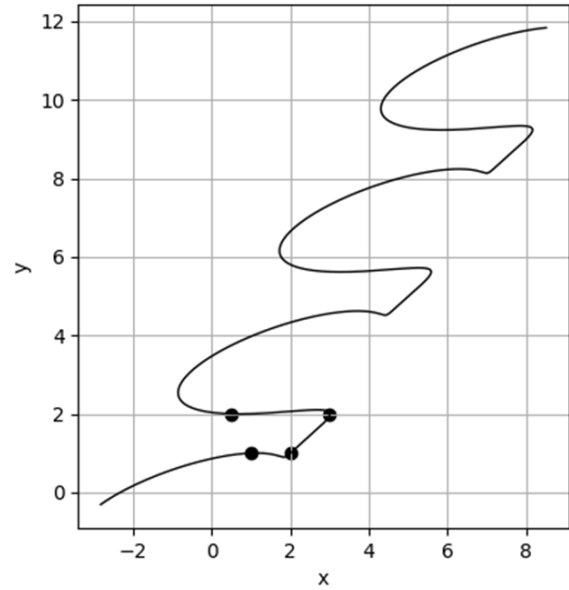


Fig.1. An example of an open periodic curve that passes through 4 points built with a hybrid polynomial

Noteworthy, a curve represented by the hybrid polynomial is the closest to a helix when it passes through 3 and not 4 points (Figure 2), although the helix itself is typically set by four points in space. This may be attributed to the redundancy of the hybrid polynomial, the same redundancy we will exploit later.

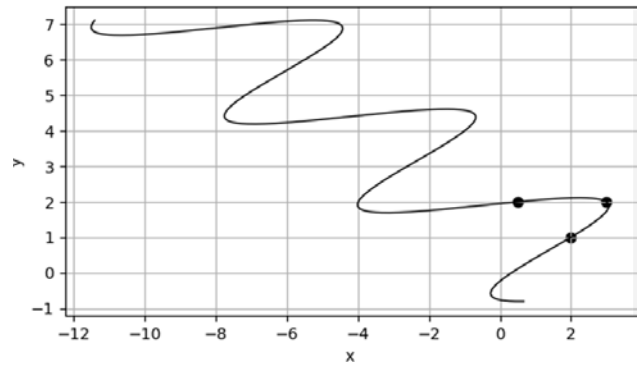


Fig.2. An example of a periodic curve constructed with a hybrid polynomial that passes through 3 points

In our earlier work, we added the derivatives conditions into the linear systems to ensure that the target curve not only passes through some points but also has tangent vectors defined in some points [10]. This provides even greater control over the shape of the curve. The level of control is similar to what Bezier curves or Hermit splines provide.

To achieve this control, we need to add the polynomial's derivatives equating the tangent vectors' coordinates to the system of equations:

$$P_x(t_p)' = dx_p,$$

$$\begin{aligned} P_y(t_p)' &= dy_p, \\ P_z(t_p)' &= dz_p. \end{aligned}$$

The derivative $P(x)'$ of the hybrid polynomial $P(x)$ is:

$$P(x) = \sum_{k=2}^n a_k i(k-1)e^{ikx} + a_1.$$

The tuple (dx_p, dy_p, dz_p) – is the tuple of coordinates of the tangent vectors at the points of the curve that correspond to the parameter values t_p , where $p = 1..q$, for a set of q tangent vectors.

To keep the systems solvable we must compensate for the addition of new conditions by either increasing the polynomials' degree or reducing the number of interpolation points. For instance, in Figure 3 we show an example of a periodic curve that goes through 2 points and has 2 tangent vectors defined in these points. The degree of this polynomial is then 3.

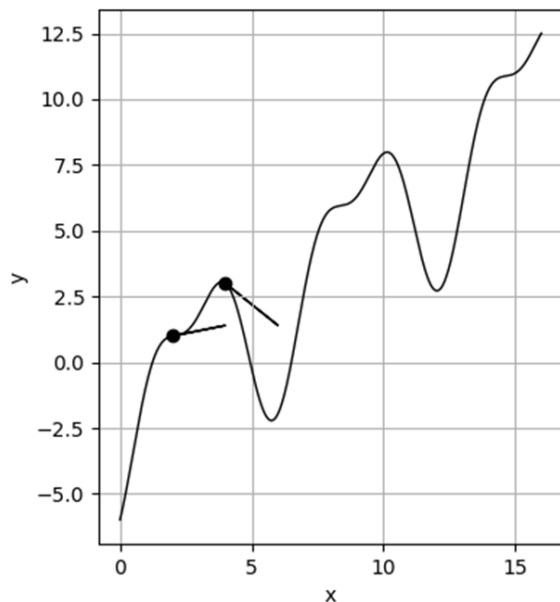


Fig. 3. An example of a periodic curve that passes through a pair of points and has also tangent vectors defined at those points

For now, we have only set the real parts of the interpolation data points, using the points' or tangent vectors' coordinates as real numbers to set the systems of linear equations when computing the interpolating polynomial coefficients. But we can add imaginary parts to all the numbers that are based on the real coordinates as well. This approach adds variability to the curve's shape without compromising the point or tangent conditions.

Let us restate the systems of equations to include the imaginary components xim_j , yim_j , and zim_j which we add to the coordinates of the interpolating points (x_j, y_j, z_j) . From now on, we'll consider these as the systems of equations that connect the coefficients of the polynomials with the select conditions:

$$\begin{aligned} Pc_x(t_j) &= x_j + xim_j, j = 1..m, \\ Pc_y(t_j) &= y_j + yim_j, j = 1..m, \\ Pc_z(t_j) &= z_j + zim_j, j = 1..m. \end{aligned}$$

Solving these systems, when $m = n + 1$, results in the coefficients of the per-coordinate interpolating polynomials we can use to construct the periodic curve passing through m points for any values of the imaginary components xim_j , yim_j , and zim_j .

An example of curves that pass through the given set of points in real numbers but have different values of imaginary components is shown in Figure 4.

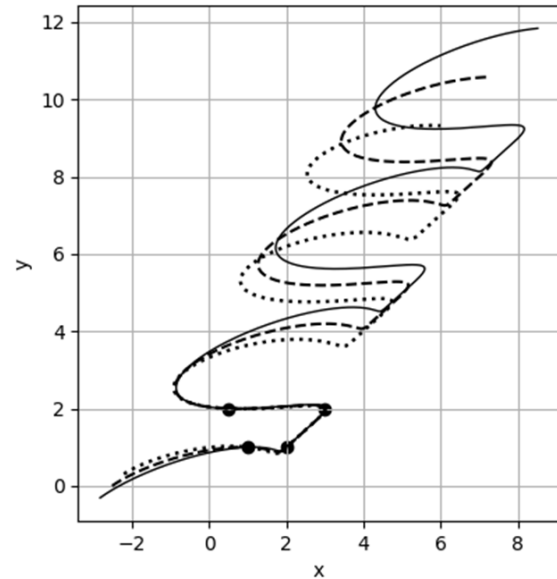


Fig. 4. An example of curves that go through the same 4 points but remain variable due to the imaginary components of the data points

Imaginary components of the points' coordinates that do not affect the interpolation conditions form a separate space in which the curve, while constrained to the interpolating points, is variable. We can exploit this to numerically optimize some properties of the curve by finding the optimal point in this separate space made of the imaginary components of the input data: $[xim_1, yim_1, zim_1, xim_2, yim_2, zim_2, \dots, xim_j, yim_j, zim_j, \dots, xim_m, yim_m, zim_m]$.

For instance, we can minimize the length of the curve of a parameter's interval $[0.. 2\pi]$ using a numerical optimization method, such as the Broyden, Fletcher, Goldfarb, and Shanno [11] method. The length of the curve for the target function can then also be computed numerically. Since the curve is periodic, the minimization of its length on the period-long parameter interval means also that the length will be minimized on every interval longer than 2π . Further in this paper, when mentioning minimizing the curve's length we specifically mean the minimization of a periodic curve's length on the parameter's interval $[0.. 2\pi]$.

An example of such a curve with minimized length is shown in Figure 5.

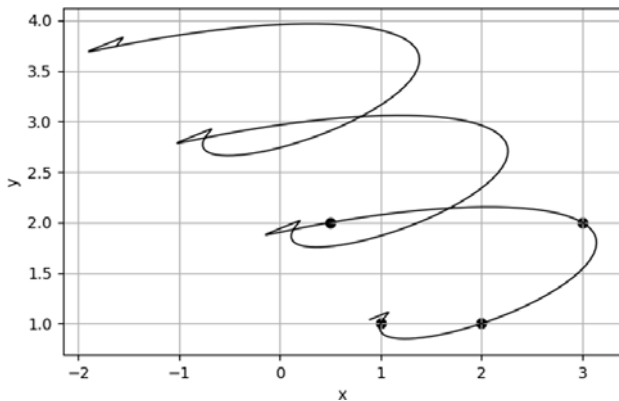


Fig. 5. An example of a curve with a minimized length that goes through 4 points

The points through which the curve passes in Figure 5 are the same points as in Figures 3 and 4. This is the same data set in real numbers, the same degrees of polynomials that define the curve, the only thing that differs is the imaginary parts of the data and the polynomial coefficients respectively.

Building a periodic surface based on a periodic curve

It is well known that if the length of a parametric curve $P(t)$ in the complex space equals 0, then the surface $S(u, v)$ formed from this curve by the parameter substitution will be minimal. The parameter substitution in question is this:

$$t = u + iv.$$

The methods to construct such surfaces are studied in different works of Ausheva N. M. such as [12; 13].

We use the same substitution to turn a periodic curve built with the hybrid exponential-algebraic polynomial into a periodic surface (see Figure 6). We will call the curve that forms such a surface a forming curve.

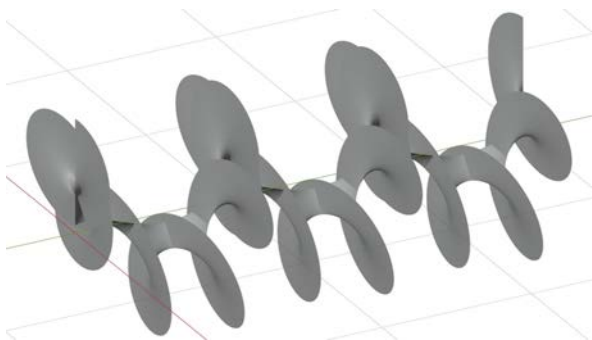


Fig. 6. A fragment of a periodic surface constructed with a periodic forming curve

A periodic surface is then the surface that replicates itself on some interval of parameter u (Sic! not v) up

to some translation. A helical surface, or a surface of a screw, is an example of such a periodic surface.

The question arises whether minimizing the length of the forming parametric curve to any non-zero number will minimize the surface's curvature up to any kind of proportion. Given that we use computer-based numeric optimization to build the forming curve, we arranged a series of computational experiments to answer this question.

Forming curve length minimization in the complex space

Let $C(t) \rightarrow (x, y, z)$ be a parametric curve defined with a hybrid polynomials $C(t) = (P_x(t), P_y(t), P_z(t))$. The curve passes through a predefined set of points (x_j, y_j, z_j) , $j = 1..m$ in the real 3-dimensional space $\mathbb{R}^3$. We use numeric optimization to minimize its length in the complex space $\mathbb{C}^3$ by finding the optimum point in the space of imaginary parts of the interpolating points:

$$[xim_1, yim_1, zim_1, xim_2, yim_2, zim_2, \dots, xim_m, yim_m, zim_m] \in \mathbb{R}^{3m}.$$

When substituting t with $u + iv$, the curve equation becomes the surface equation:

$$S(u, v) \rightarrow (x, y, z).$$

We conducted a series of experiments where the curve goes through the set of m points produced by the randomization of the points equidistantly parametrized on a spiral curve on the parameter range $t = [0, 2\pi]$. The z coordinate of such points is randomly shifted within the predefined $[-dxyz, dxyz]$ range, their parameter is shifted randomly within the $[-dt, dt]$ range.

In each experiment, we measured the average of the mean curvature values (AMC) of the surface S defined randomly in a number of control points in the parametric space on the $u = [0, 2\pi]$, $v = [0, 1]$ range. The number of control points is variable. Let's call it n .

Minimization of the curve was conducted numerically using the Broyden, Fletcher, Goldfarb, and Shanno method. We tried to find the dependency of this measured AMC on the minimized length of the forming curve.

We conducted a set of experiments with $m = 5$ interpolating points, and $n = 1000, 10000$, and 100000 control points. The first two experiments were run for 100 randomized combinations of interpolating points, the last experiment had to be stopped at 50 randomized configurations due to its excessive runtime.

The data collected has been analyzed in the following way. To establish the correlation between the curve length minimization in the complex space and the minimization of AMC of the surface, the Pearson coefficient has been computed. Also, the p-value has been computed to validate the zero hypothesis.

The results were inconclusive. On one hand, some experiments show the expected correlation between the forming curve's length in the complex space and the

AMC computed, however, the correlation is too weak to state that minimizing the complex length of the forming curve leads to the minimization of the AMC.

The p-values we computed confirm this conclusion for each series of experiments.

We tried an alternative way of minimizing the AMC, which lies in numerically minimizing AMC on a finite set of points defined in a regular grid on $u = [0, 2\pi]$, $v = [0, 1]$. To minimize this metric we had to employ another optimization algorithm: Powell's conjugate direction [14].

But even with this problem restatement, we didn't get criteria for guaranteed AMC minimization. Moreover, even the correlation between the AMC of the points on a regular grid and the AMC of the randomized control point has not been confirmed statistically.

Conclusion

Constructing a periodic curve with the hybrid polynomial of degree n , consisting of two algebraic members: a_1x and a_0 and $n-2$ exponential members $a_k e^{ix(k-1)}$ allows passing the curve through the n points of the real 2D space (x_i, y_i) or 3D space (x_i, y_i, z_i) , $i = 1..n$. It also enables the numerical optimization of a predefined metric in the space of the imaginary components xim_i, yim_i, zim_i of the interpolating points $(x_i + i xim_i, y_i + i yim_i, z_i + i zim_i)$.

However, this is not sufficient to construct minimal surfaces or even surfaces with minimized mean curvature. While we can predictably minimize the length of a forming curve in the complex space, this minimization does not necessarily correlate with a predictable reduction in the mean curvature of the resulting surface on the intervals $u = [0, 2\pi]$, $v = [0, 1]$.

REFERENCES

1. Farouki, R.T., Hana, C.Y., Mannib, C., Sestinic, A. (2004). Characterization and construction of helical polynomial space curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 162 (2004), 365–392. <https://doi.org/10.1016/J.CAM.2003.08.030>.
2. Yılmaz, B., Has, A. (2019). New Approach to Slant Helix. *International Electronic Journal of Geometry*, 12 (1), 111–115. <https://doi.org/10.36890/iejg.545879>.
3. Menninger, A. (2014). Characterization of the Slant Helix as Successor Curve of the General Helix. *International Electronic Journal of Geometry*, 7 (2), 84–91. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1411.0550>.
4. Izumiya, Sh., Takeuchi, N. (2004). New Special Curves and Developable Surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28 (2), Art. 6. Available at <https://journals.tubitak.gov.tr/math/vol28/iss2/6>.
5. Uzunoğlu, B., Gök, İ., Yaylı, Y. (2016). A new approach on curves of constant precession. *Applied Mathematics and Computation*, 275 (2016), 317–323. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.11.083>.
6. Bangert, C., Prautzsch, H. (1997). Circle and sphere as rational splines, *Neural Parallel Sci. Comput.* 5 (1997), 153–161.
7. Fiorot, J.-C., Jeannin, P., Cattiaux-Huillard, I. (1997). The circle as a smoothly joined BR-curve on $[0,1]$, *Comput. Aided Geom. Design*, 14 (1997), 313–323.
8. Farouki, R.T., Manni, C., Sestini, A. (2002). Spatial C2 PH quintic splines, in: T. Lyche et al. (Eds.) *Curve and Surface Design*: St. Malo, Nashboro Press, 2003, 123–146.
9. Piegl, L., Tiller, W. (1997). *The NURBS Book*. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-59223-2>.
10. Ausheva, N., Kaleniuk, O., Sydorenko, Iu. (2024) Using Exponential Complex Polynomials for Constructing Closed Curves with Given Properties. *Control Systems and Computers*, 307 (3), 3–9. <https://doi.org/10.15407/csc.2024.04.003>.
11. Fletcher, R. (1988). *Practical methods of optimization*. Wiley.
12. Ausheva, N., Olevskiy, V., Olevska, Yu. (2019). Modeling of Minimal Surface Based on an Isotropic Bezier Curve of Fifth Order. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*. 52 (2019), 1–15. <https://doi.org/10.7546/jgsp-52-2019-1-15>.
13. Andrianov, I.V., Ausheva, N.M., Olevska, Yu.B., Olevskiy, V.I. (2019). Surfaces Modelling Using Isotropic Fractional-Rational Curves. *Journal of Applied Mathematics*, 4 (2019), 1–13. <https://doi.org/10.1155/2019/5072676>.
14. Powell, M.J.D. (1964). An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *Computer Journal*, 7 (2), 155–162.

ДИНАМІКА ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗМІННИМИ ЗА ЧАСОМ ПАРАМЕТРАМИ ТА НЕЛІНІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ ДЕМПФУВАННЯ У РАЗІ НАЯВНОСТІ ЛОКАЛІЗОВАНОГО ЗОВНІШНЬОГО ЗБУРЕННЯ

Гришак В. З.

*доктор технічних наук, професор,
професор кафедри конструювання, технічної естетики і дизайну
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
пр-т Дмитра Яворницького, 19, Дніпро, Україна
orcid.org/0000-0001-8685-3191
Hryshchak.V.Z@nmu.one*

Руденко Д. О.

*аспірантка
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0009-0007-8880-153X
dar.rudenko97@gmail.com*

Ключові слова: асимптотико-чисельний алгоритм, змінні за часом параметри, наближений аналітичний розв'язок, нелінійна функція демпфування, локалізоване збурення, функція Дірака.

Актуальним завданням у математичній фізиці постає розробка аналітично-числових методик для вивчення динамічних характеристик нелінійних еластичних систем. Їх застосовують у різних сферах, таких як авіаційна промисловість, суднобудування, будівництво споруд, машинобудівна галузь, ракетобудування, а також у виробництві двигунів і промислового обладнання. Функція Дірака служить потужним математичним засобом, без якого неможливо уявити багато фізичних дисциплін. Вона є фундаментальним поняттям, що широко використовується в галузі фізики. Важливість δ -функції Дірака особливо підкреслена в математичній фізиці. Це стосується таких галузей, як електродинаміка, газова динаміка, оптика, акустика, квантова механіка, аеродинаміка та гідродинаміка. Отже, постає потреба у створенні дієвих гібридних наближених аналітико-числових алгоритмів дослідження, що ґрунтуються на передових асимптотичних методах. Мова про ті системи, чий параметри зазнають змін у часі та у просторі під локалізованим зовнішнім впливом, який математично описується δ -функцією Дірака. Важливо підкреслити, що лише вкрай особливі випадки дозволяють отримати точні аналітичні розв'язки для таких задач. Останні, як правило, представлені диференціальними рівняннями сингулярного типу із змінними коефіцієнтами або їх системами. Ускладнення також виникають через присутність параметрів біля старшої похідної рівняння та нелінійної компоненти. Обговорюється аналітико-чисельний алгоритм розв'язку задачі нелінійної динаміки пружної системи із змінними у часі параметрами і нелінійною функцією демпфування з урахуванням впливу зовнішнього локалізованого збурення. Представлено результати розрахунків за запропонованим аналітичним алгоритмом із застосуванням комп'ютерної алгебри. Виконано порівняння у ключових моментах аналізу із даними прямого чисельного інтегрування основного диференціального рівняння досліджуваної задачі. Використовуючи програму комп'ютерної алгебри «Mathematica» побудовано графіки результатів обчислень і графіки порівняння з прямим чисельним інтегруванням.

DYNAMICS OF AN ELASTIC SYSTEM WITH TIME-VARYING PARAMETERS AND A NONLINEAR DAMPING FUNCTION IN THE PRESENCE OF A LOCALIZED EXTERNAL DISTURBANCE

Gristchak V. Z.

*Doctor of Technical Sciences, Professor,
Professor at the Department of Construction, Technical Aesthetics and Design
National Technical University "Dnipro Polytechnic"
Dmytro Yavornytskyi Ave., 19, Dnipro, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8685-3191
Hryshchak.V.Z@nmu.one*

Rudenko D. O.

*Postgraduate Student
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0009-0007-8880-153X
dar.rudenko97@gmail.com*

Key words: asymptotic numerical algorithm, time-varying parameters, approximate analytical solution, nonlinear damping function, localized perturbation, Dirac function.

The development of analytical and numerical methods for studying the dynamic characteristics of nonlinear elastic systems is an urgent task in mathematical physics. They are used in various fields, such as the aviation industry, shipbuilding, building construction, mechanical engineering, rocketry, as well as in the production of engines and industrial equipment. The Dirac function serves as a powerful mathematical tool without which many physical disciplines are unimaginable. It is a fundamental concept widely used in the field of physics. The importance of the Dirac δ -function is particularly emphasised in mathematical physics. This applies to such fields as electrodynamics, gas dynamics, optics, acoustics, quantum mechanics, aerodynamics, and hydrodynamics. Therefore, there is a need to create effective hybrid approximate analytical and numerical research algorithms based on advanced asymptotic methods. We are talking about those systems whose parameters undergo changes in time and space under localised external influence, which is mathematically described by the δ -Dirac function. It is important to emphasise that only very special cases allow us to obtain exact analytical solutions for such problems. The latter are usually represented by singular value differential equations with variable coefficients or their systems. Complications also arise due to the presence of parameters near the highest derivative of the equation and the nonlinear component. The analytical-numerical algorithm for solving the problem of nonlinear dynamics of an elastic system with time-varying parameters and a nonlinear damping function taking into account the influence of an external localized disturbance is discussed. The results of calculations using the proposed analytical algorithm with the use of computer algebra are presented. The key points of the analysis are compared with the data of direct numerical integration of the basic differential equation of the problem under study. Using the computer algebra program "Mathematica", graphs of the calculation results and graphs of comparison with direct numerical integration are constructed.

Вступ. Розробка аналітико-чисельних підходів до розрахунку динамічних характеристик нелінійних пружних систем із змінними у часі і координатами параметрів у разі дії локалізованого зовнішнього збурення, яке описується функцією Дірака, є актуальною

задачею математичної фізики [1–7]. Як відомо, точні аналітичні розв'язки вказаних проблем, які зводяться до диференціальних рівнянь сингулярного типу із змінними коефіцієнтами та їх систем, у разі наявності параметрів при старшій похідній розв'язуваль-

ного рівняння і нелінійній складовій частині можуть бути здобуті лише у виняткових випадках. У зв'язку із застосуванням комп'ютерної алгебри асимптотичні методи дають можливість єдиного підходу до різних прикладних задач, зокрема нелінійної динаміки конструкцій у разі локалізованого збурення [8; 9]. Тому виникає необхідність у розробці ефективних гібридних наближених аналітико-чисельних алгоритмів [10; 11] дослідження на базі сучасних асимптотичних підходів. Останнім часом значна увага приділяється методам, що дозволяють розширити область застосування асимптотичних підходів за параметрами розвинення для аналізу статико-динамічних процесів [12].

У цій роботі обговорюється аналітико-чисельний алгоритм розв'язку задачі нелінійної динаміки пружної системи із змінними у часі параметрами і нелінійною функцією демпфування n -ого ступеня з урахуванням впливу зовнішнього локалізованого збурення.

1. Постановка і розв'язок задачі динаміки пружної системи із нелінійною функцією демпфування

Розглядається розв'язок диференціального рівняння другого порядку з нелінійною першою похідною у формі:

$$y'' + \varepsilon a(x) y''' + \lambda^2 b(x) y = 0, \quad (1)$$

де $y(x)$ – шукана функція;

$a(x), b(x)$ – задані функції;

n – ступінь першої похідної;

ε, λ – параметри з умовою, що $\varepsilon < 1$ та $\lambda > 1$.

Як початкові умови приймається:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (2)$$

За допомогою методу збурення [12] отримується розв'язок рівняння у вигляді:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i y_i(x). \quad (3)$$

Розглядаються перші два елементи (3) для отримання загального розв'язку:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x), \quad (4)$$

$$y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon a(x)[y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x)]' + \lambda^2 b(x)[y_0(x) + \varepsilon y_1(x)] = 0. \quad (5)$$

Перша початкова умова підставляється в розв'язок (4):

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) = 1. \quad (6)$$

У разі однакових ступенів параметру ε отримуємо:

$$y_0(0) = 1, \quad y_1(0) = 0. \quad (7)$$

Друга початкова умова:

$$y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) = 0 \quad (8)$$

приводить до залежностей:

$$y_0'(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0. \quad (9)$$

У разі першого наближення за параметром ε розглядається однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$y_0'' + \lambda^2 b(x) y_0 = 0. \quad (10)$$

Після заміни $\mu = \frac{1}{\lambda}$ у (10) отримується рівняння у формі:

$$\mu^2 y_0'' + b(x) y_0 = 0, \quad (11)$$

де μ – малий параметр.

Під час розв'язання рівняння (11), згідно з методом фазних інтегралів, маємо:

$$y_0(x) = \exp\left(\int \varphi(x) d\xi\right), \quad (12)$$

де $\varphi(x) = \mu^{-1} \varphi_0(x) + \mu^0 \varphi_1(x) + \dots$ – невідомі функції.

Розглядаючи лише перший член розвинення, у рівнянні (12) знайдемо першу та другу похідні $y_0(x)$:

$$y_0'(x) = \varphi(x) \exp\left(\int \varphi(x) d\xi\right), \quad (13)$$

$$y_0''(x) = (\varphi^2(x) + \varphi'(x)) \exp\left(\int \varphi(x) d\xi\right). \quad (14)$$

Підставляючи (12), (13) і (14) у рівняння (11), буде знайдено розв'язок для функції $\varphi_0(x)$:

$$\varphi_0^2(x) = -b(x), \quad (15)$$

$$\varphi_{0,2}(x) = \pm i b(x)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Отже, розв'язок рівняння (11) за методом ВКБ [13] має вигляд:

$$y_0(x) = C_1 \sin(k(x)) + C_2 \cos(k(x)), \quad (17)$$

де $k(x) = \int \mu^{-1} \varphi_0(x) dx = \int \lambda b(x)^{\frac{1}{2}} dx = \lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx$.

У результаті розв'язок (17) матиме вигляд:

$$y_0(x) = C_1 \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + C_2 \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (18)$$

У разі застосування першої початкової умови у розв'язку (18) знаходиться значення коефіцієнта C_2 :

$$y_0(0) = C_1 \sin\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}} dx\right) + C_2 \cos\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}} dx\right) = 1. \quad (19)$$

$$= C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2 = 1$$

Знайдемо першу похідну (18):

$$y_0'(x) = C_1 \lambda b(x)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) - C_2 \lambda b(x)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (20)$$

За умови застосування другої початкової умови до першої похідної (20) значення коефіцієнта C_1 є таким:

$$y_0'(0) = C_1 \lambda b(0)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}} dx\right) - C_2 \lambda b(0)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}} dx\right) = 0 \quad (21)$$

З таких розрахунків випливає, що коефіцієнт $C_1 = 0$, а коефіцієнт $C_2 = 1$. Отже, розв'язок рівняння (10) має вигляд:

$$y_0(x) = \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (22)$$

На другому наближенні, прирівнюючи коефіцієнти за однакових ступенів ε^1 , отримуємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$y_1'' + \lambda^2 b(x) y_1 = -\varepsilon a(x) y_0''', \quad (23)$$

Частинний розв'язок рівняння (23) шукається за допомогою методу варіації довільної сталої [13], тобто розв'язок буде мати вигляд:

$$y_1(x) = y_1^3(x) + y_1''(x), \quad (24)$$

де $y_1^3(x)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння, $y_1''(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння від (23) записується у формі:

$$y_1''' + \lambda^2 b(x) y_1^3 = 0. \quad (25)$$

Загальне рішення рівняння (25) має вигляд:

$$y_1^3(x) = C_1 \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + C_2 \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (26)$$

Зробивши заміну констант на невідомі функції:

$$C_1 = d_1(x), \quad C_2 = d_2(x) \quad (27)$$

у розв'язку (26), маємо частинне рішення неоднорідного рівняння (23):

$$y_1''(x) = d_1(x) \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + d_2(x) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (28)$$

Використовуючи метод варіації довільної сталої для розв'язання рівняння, отримується система:

$$\begin{cases} d_1'(x) \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + d_2'(x) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) = 0 \\ d_1'(x) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) - d_2'(x) \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) = \frac{-\varepsilon a(x) y_0'''}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (29)$$

Із системи можемо знайти значення невідомих функцій. Для цього з (29) виразимо похідні $d_1'(x)$, $d_2'(x)$:

$$d_1'(x) = -\frac{\varepsilon a(x) y_0''' \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}}, \quad (30)$$

$$d_2'(x) = \frac{\varepsilon a(x) y_0''' \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}}. \quad (31)$$

Після інтегрування виразів (30) і (31) отримуються невідомі функції $d_1(x)$, $d_2(x)$:

$$d_1(x) = \int -\frac{\varepsilon a(x) y_0''' \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}} dx = \varepsilon (-\lambda)^{n-1} \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} dx, \quad (32)$$

$$\sin^n\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx,$$

$$d_2(x) = \int \frac{\varepsilon a(x) y_0''' \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}} dx = -\varepsilon (-\lambda)^{n-1} \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} dx \sin^{n+1}\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx. \quad (33)$$

Підставляючи результати (32) та (33) у (28), отримаємо розв'язок рівняння (23):

$$y_1(x) = \varepsilon (-\lambda)^{n-1} \sin\left(\frac{\lambda}{2} x^2\right) \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} dx \sin^n\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx - \varepsilon (-\lambda)^{n-1} \cos\left(\frac{\lambda}{2} x^2\right) \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} dx \sin^{n+1}\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx. \quad (34)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) представляється у формі:

$$y(x) = \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + \varepsilon \left[d_1(x) \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + d_2(x) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) \right], \quad (35)$$

де

$$d_1(x) = \varepsilon (-\lambda)^{n-1} \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} dx \sin^n\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx, \quad (36)$$

$$d_2(x) = -\varepsilon (-\lambda)^{n-1} \int a(x) b(x)^{\frac{n-1}{2}} dx \sin^{n+1}\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) dx. \quad (37)$$

2. Приклад розв'язку задачі динаміки пружної системи для вільних коливань із нелінійним демпфуванням і локалізованим збуренням

В умовах вільних коливань системи права частина рівняння (1)

$$D_0(x) = 0 \Rightarrow y(x) = y[x, d_1(x), d_2(x)]. \quad (38)$$

За наявності локального збурення досліджуваної системи основне рівняння задачі має вигляд:

$$y''(x) + \varepsilon a(x) y''(x) + \lambda^2 b(x) y(x) = A_0 \delta(x - x_0), \quad (39)$$

де $\delta(x - x_0)$ – функція Дірака.

Застосовуючи метод збурення у формі

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x), \quad (40)$$

з початкових умов отримаємо залежності:

$$a) \quad y(0) = 1, \quad (41)$$

$$b) \quad y'(0) = 0. \quad (42)$$

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) = 1 :$$

$$y_0(0) = 1,$$

$$y_1(0) = 0.$$

$$y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) = 0 :$$

$$y_0'(0) = 0,$$

$$y_1'(0) = 0.$$

З урахуванням (40) рівняння (39) має вигляд:

$$y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon a(x)[y_0(x) + \varepsilon y_1(x)]^n + \lambda^2 b(x)[y_0(x) + \varepsilon y_1(x)] = A_0 \delta(x - x_0). \quad (43)$$

У першому наближенні отримуємо рівняння у формі

$$\varepsilon^0 : y_0''(x) + \lambda^2 b(x) y_0(x) = A_0 \delta(x - x_0), \quad (44)$$

$$\text{де } D_0(x) = A_0 \delta(x - x_0). \quad (45)$$

Вводячи параметр $\mu = \frac{1}{\lambda}$, неоднорідне рівняння (44) розв'язується застосуванням методів варіації довільних сталих і фазних інтегралів:

$$\mu^2 y_0''(x) + b(x) y_0(x) = D_0(x) \quad (46)$$

$$\psi_0^3(x) = C_1 \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + C_2 \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (47)$$

Частинний розв'язок отримується за стандартною процедурою інтегрування неоднорідного рівняння у відповідності до $D_0(x)$.

Наприклад, для функції

$$b(x) = x^2 \quad (48)$$

отримується загальний розв'язок

$$\psi_0^3(x) = C_1 \sin\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) + C_2 \cos\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right). \quad (49)$$

За початковими умовами

$$\psi_0(0) \Rightarrow y_0(0) = 1 \Rightarrow y_0(0) = \psi_0(0) + \bar{\psi}_0(0) = 1 \quad (50)$$

і параметрами системи

$$D_0(x) = 0, n = 3, b(x) = x^2, a(x) = x, \quad \varepsilon = 0, 1, \lambda = 10 \quad (51)$$

отримується розв'язок

$$y(x) = \cos\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) + \varepsilon \left[d_1(x) \sin\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) + d_2(x) \cos\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) \right], \quad (52)$$

$$\text{де } d_1(x) = \varepsilon (-\lambda)^2 \int x^3 \sin^2\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) \cos\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) dx, \quad (53)$$

$$d_2(x) = -\varepsilon (-\lambda)^2 \int x^3 \sin^4\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right) dx. \quad (54)$$

Підставивши (51) у (53) і (54), отримуємо:

$$d_1(x) = 10 \int x^3 \sin^2(5x^2) \cos(5x^2) dx \quad (55)$$

$$d_2(x) = -10 \int x^3 \sin^4(5x^2) dx. \quad (56)$$

$$d_1(x) = -0,25 \cos(10x^2) + 0,025 \sin(10x^2) \quad (57)$$

$$d_2(x) = -0,9375x^4 + 0,025 \cos(10x^2) - 0,0015625 \cos(20x^2) + 0,25x^2 \sin(10x^2) - 0,03125x^2 \sin(20x^2). \quad (58)$$

3. Результати чисельних розрахунків і порівняння із прямим чисельним методом аналізу

На рисунках 1–3 представлено результати чисельних розрахунків і їх порівняння із прямим чисельним методом аналізу, виконані із використанням програми комп'ютерної алгебри «Mathematica» [14]. Показано подібність поведінки графіків. Деяка розбіжність зумовлена використанням першого наближення у побудові графіків. Особливістю цього підходу є те, що гібридний метод дає можливість побудувати аналітичні розв'язки для малих величин та параметрів.

Висновки. Запропоновано асимптотико-чисельний алгоритм розв'язку задач динаміки пружних систем із змінними у часі параметрами і нелінійною функцією демпфування n -ого ступеня і наявності локалізованого збурення. Ефект зовнішнього локалізованого збурення можна суттєво зменшити застосуванням відповідних параметрів досліджуваної системи. Поліпшення здобутих розв'язків з точки зору величини параметрів асимптотичного розв'язку досягається застосуванням запропонованого гібридного асимптотичного підходу на базі методів збурення і фазних інтегралів за параметрами у разі нелінійного складника і сингулярності базового рівняння із залученням принципу ортогоналізації за Гальоркіним [13] та застосуванням комп'ютерної алгебри, зокрема системи «Mathematica» [14].

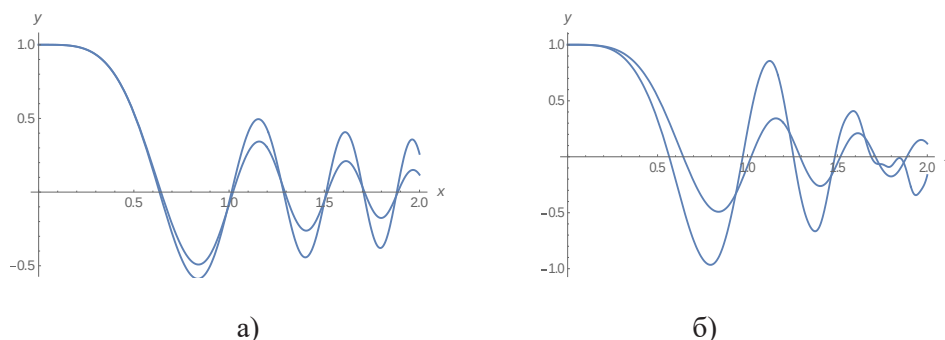


Рис. 1. Вільні коливання системи із нелінійним демпфуванням:
а) вплив нелінійного демпфування; б) порівняння з чисельним розв'язком

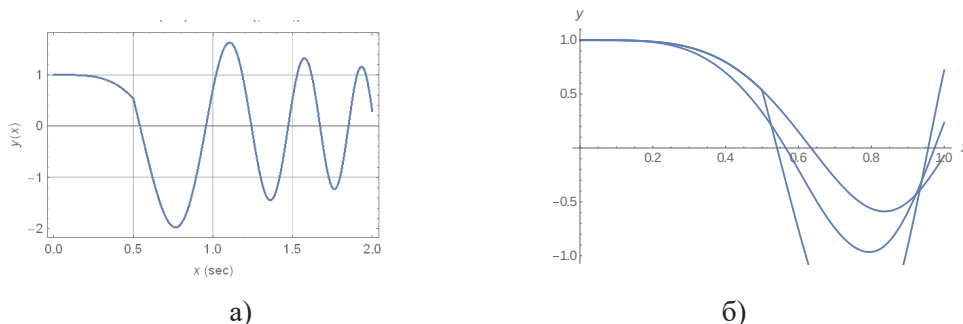


Рис. 2. Вплив локалізованого зовнішнього збурення:
а) характер впливу локалізованого збурення; б) порівняння аналітичного і чисельного розв'язків у разі локалізованого зовнішнього збурення

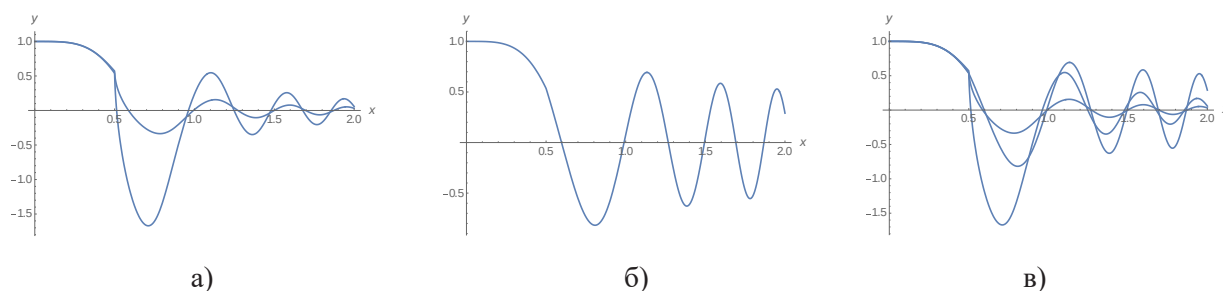


Рис. 3. Керування динамічним процесом параметрами системи:
а) вплив амплітуди першої похідної; б) вплив ефекту локалізованого збурення функції демпфування (функція Дірака при першій похідній); в) вплив досліджуваних ефектів

ЛІТЕРАТУРА

1. Ключ І.С. Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. *Вісник Національного авіаційного університету*. 2006. Т. 4. С. 209–211.
2. Крутій Ю.С. Точний розв'язок диференціального рівняння вимушених поздовжніх коливань стержня з довільними неперервними параметрами. *Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки*. 2015. Т. 6. № 231. С. 23–29.
3. Javidi M., Ahmad B. Numerical solution of fourth-order time-fractional partial differential equations with variable coefficients. *Journal of Applied Analysis & Computation*. 2015. Vol. 5. No. 1. P. 52–63. URL: <https://doi.org/10.11948/2015005>.
4. Reutskiy S.Y. A new semi-analytical collocation method for solving multi-term fractional partial differential equations with time variable coefficients. *Applied Mathematical Modelling*. 2017. Vol. 45. P. 238–254. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.12.029>.
5. Hao Z., Park M., Lin G., Cai Z. Finite element method for two-sided fractional differential equations with variable coefficients: Galerkin approach. *Journal of Scientific Computing*. 2018. Vol. 79. No. 2. P. 700–717. <https://doi.org/10.1007/s10915-018-0869-5>.
6. Самойленко В., Самойленко Ю. Асимптотичний аналіз сингулярно збурених рівнянь інтегрованого типу зі змінними коефіцієнтами. *Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук : збірник наукових праць*, м. Львів. Львів, 2021. С. 161–164.
7. Vassouch M. The discontinuous Galerkin method for general nonlinear third-order ordinary differential equations. *Applied Numerical Mathematics*. 2021. Vol. 162. P. 331–350. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.01.003>.
8. Гришак В.З., Руденко Д.О. До аналізу нелінійних коливань пологих оболонок із функціонально-градієнтних матеріалів зі змінними у часі параметрами за наявності локалізованого збурення. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2025. Т. 1. № 38. С. 51–63. <https://doi.org/10.15421/4224104>.
9. Гришак В.З., Руденко Д.О. Hybrid asymptotic approach to solving nonlinear differential equations with variable coefficients in the presence of the δ -function. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2024. No. 1. P. 5–10. <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-1-01>.

10. Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation – Galerkin technique for partial differential equations. *Asymptotic Analysis and Numerical Solution of Partial Differential Equations*. 1990. Vol. 130. P. 113–134.
11. Geer J.F., Andersen C.M. Resonant frequency calculations using a hybrid perturbation-Galerkin technique. *Applied Mechanics Reviews*. 1991. Vol. 44, no. 11S. P. S76–S88. <https://doi.org/10.1115/1.3121376>.
12. Gristchak V.Z., Dmitrijeva Y.M. A hybrid WKB-Galerkin method and its application. *Technische mechanik*. 1995. Vol. 15. No. 4. P. 281–294.
13. Гришчак В.З. Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2009. 226 с.
14. Wolfram S. *Mathematica: a system for doing mathematics by computer*. 2nd ed. Reading, Mass : Addison-Wesley Pub. Co., 1991. 961 p.

REFERENCES

1. Klyus, I.S. (2006). Multipoint problem for partial differential equations with variable coefficients. *Visnyk of the National Aviation University*, 4, 209–211 [in Ukrainian].
2. Krutii, Y.S. (2015). Exact solution of the differential equation of forced longitudinal vibrations of a rod with arbitrary continuous parameters. *Visnyk of the Khmelnytsky National University. Technical sciences*, 6(231), 23–29 [in Ukrainian].
3. Javidi, M. & Ahmad, B. (2015). Numerical solution of fourth-order time-fractional partial differential equations with variable coefficients. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 5(1), 52–63. <https://doi.org/10.11948/2015005>.
4. Reutskiy, S.Y. (2017). A new semi-analytical collocation method for solving multi-term fractional partial differential equations with time variable coefficients. *Applied Mathematical Modelling*, 45, 238–254. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.12.029>.
5. Hao, Z., Park, M., Lin, G., & Cai, Z. (2018). Finite element method for two-sided fractional differential equations with variable coefficients: Galerkin approach. *Journal of Scientific Computing*, 79(2), 700–717. <https://doi.org/10.1007/s10915-018-0869-5>.
6. Samoilenko, V. & Samoilenko, Yu. (2021). Asymptotic analysis of singularly perturbed integral-type equations with variable coefficients. *Modern problems of applied mathematics and computer science*. P. 161–164. Ivan Franko National University of Lviv [in Ukrainian].
7. Baccouch, M. (2021). The discontinuous Galerkin method for general nonlinear third-order ordinary differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 162, 331–350. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.01.003>.
8. Grishchak, V.Z. & Rudenko, D.O. (2024). Hybrid asymptotic approach to solving nonlinear differential equations with variable coefficients in the presence of the δ -function. *Computer Science and Applied Mathematics*, (1), 5–10. <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-1-01>.
9. Grishchak, V.Z. & Rudenko, D.O. (2025). To the analysis of nonlinear oscillations of shallow shells of functional-gradient materials with time-varying parameters in the presence of localized disturbance. *Problems of computational mechanics and strength of structures*, 1(38), 51–63. <https://doi.org/10.15421/4224104> [in Ukrainian].
10. Geer, J.F., & Andersen, C.M. (1990). A hybrid perturbation – Galerkin technique for partial differential equations. *Asymptotic Analysis and Numerical Solution of Partial Differential Equations*, 130, 113–134.
11. Geer, J.F., & Andersen, C.M. (1991). Resonant frequency calculations using a hybrid perturbation-Galerkin technique. *Applied Mechanics Reviews*, 44(11S), S76–S88. <https://doi.org/10.1115/1.3121376>.
12. Gristchak, V.Z., & Dmitrijeva, Y.M. (1995). A hybrid WKB-Galerkin method and its application. *Technische mechanik*, 15(4), 281–294.
13. Hryshchak V.Z. (2009). *Hybrid asymptotic methods and techniques for their application*. Zaporizhzhia National University [in Ukrainian].
14. Wolfram, S. (1991). *Mathematica: A system for doing mathematics by computer*. 2nd ed. Addison-Wesley Pub. Co.

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-03>

ЗАДАЧА ПРО ЗНОШУВАННЯ ОСНОВИ ВІНКЛЕРІВСЬКОГО ТИПУ ПРЯМОКУТНИМ У ПЛАНІ ШТАМПОМ ЗА СТЕПЕНЕВОГО ЗАКОНУ ЗНОШУВАННЯ

Дугієнко О. Е.

магістр математики

Запорізький національний університет

вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна

orcid.org/0000-0001-9201-5709

aleksandrdugienko@gmail.com

Д'яченко Н. М.

кандидат фізико-математичних наук, доцент,

доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики

Запорізький національний університет

вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна

orcid.org/0000-0001-5284-4502

dyachenkonata69@gmail.com

Ключові слова:

*зносоконтактна задача,
метод половинного
ділення, метод послідовних
наближень, метод скінченних
різниць, метод степеневих
рядів, прямокутний у
плані штамп з плоскою
або неплоскою підшвою,
усталений знос.*

Зношування характеризує процес видалення матеріалу з поверхні контактуючих тіл. Відомо, що залежність швидкості зношування від контактного тиску виражається лінійним або степеневим законом.

Розглянуто контактну задачу зношування основи вінклерівського типу внаслідок руху по ній прямокутного в плані штампа на стадії усталеного зносу. Постановка такої задачі викладена в літературі, де також знайдено формули аналітичного її розв'язку у випадку лінійного закону зношування.

Робота присвячена дослідженню методів розв'язання задачі за степеневому закону зношування. Задача моделюється диференціальним або еквівалентним йому інтегральним розв'язувальним рівнянням та умовою рівноваги сил.

У випадку плоского штампа нелінійне диференціальне рівняння має аналітичний розв'язок. Для штампа з неплоскою підшвою викладено підходи до використання чисельного методу скінченних різниць на основі лівих або правих різницевих відношень. До розв'язання інтегрального рівняння застосовано метод послідовних наближень і метод степеневих рядів. За результатами застосування всіх зазначених методів отримано функції, що залежать від невідомого параметра, який знаходиться з умови рівноваги з використанням методу половинного ділення.

Проведено порівняльний аналіз результатів, отриманих різними підходами. Числові результати отримано для прямокутних у плані штампів із неплоскими підшвами, що визначаються певними поліноміальними або тригонометричними функціями. Виявлено вплив закону зношування, фізичних на геометричних параметрів на зносоконтактні характеристики.

THE PROBLEM OF WEARING A WINKLEER-TYPE FOUNDATION WITH A RECTANGULAR PLAN PUNCH ACCORDING TO THE POWER LAW OF WEAR

Dugienko O. E.

*Master of Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9201-5709
aleksandrdugienko@gmail.com*

Dyachenko N. M.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5284-4502
dyachenkonata69@gmail.com*

Key words: wear-contact problems, method of division in half, iterative method, method of finite differences, method of power series, a rectangular punch with a plane or non-plane sole, constant wear.

Wear characterizes the process of removing material from the surface of contacting bodies. It is known that the dependence of the wear rate on the contact pressure is expressed by a linear or power law.

The contact problem of wear of the foundation of the Winkler type due to the movement of a stamp rectangular in plan on it at the stage of steady wear is considered. The formulation of such a problem is described in the literature, where formulas for its analytical solution in the case of a linear wear law are also found.

The work is devoted to the study of methods of solving the problem according to the power law of wear. The problem is modeled by a differential or equivalent integral solving equation and a force equilibrium condition.

In the case of a plane punch, the nonlinear differential equation has an analytical solution. For a punch with a non-plane sole, approaches to using the numerical method of finite differences based on left or right difference relations are outlined. The iterative method and the power series method are used to solve the integral equation. As a result of the application of all the mentioned methods, functions are obtained that depend on the unknown parameter, which is from the equilibrium condition using the method of half-division.

A comparative analysis of the results obtained by different approaches was carried out. Numerical results were obtained for rectangular punches with non-plane soles defined by certain polynomial or trigonometric functions. The influence of the law of wear, physical and geometric parameters on wear contact characteristics was revealed.

Вступ. Процеси контактної взаємодії супроводжуються видаленням матеріалу з поверхні контактуючих тіл, що визначає зношування. В інженерній практиці руйнівні процеси зношування можуть привести до виходу з ладу машин і механізмів. Таким чином, дослідження зазначених процесів має практичне значення, тому зносоконтактним задачам присвячена значна кількість публікацій, серед яких роботи [1–19]. Звертає на себе увагу праця С. Y. Lee, L. S. Tian, J. W. Bae, Y. S. Chai [13], у якій розраховане контактне зношування внаслідок вібраційних навантажень U-подібних труб парогенераторів на атомних електростанціях.

Розглянемо контактну задачу про зношування півпростору прямокутним в плані штампом.

Огляд літератури. У роботах J. F. Archard [5], I. G. Goryacheva [9] викладено результати досліджень щодо залежності між швидкістю зношування та контактним тиском. Виявлено дві моделі, що підпорядковуються лінійному або степеневому законам зношування. Тут буде приділено більшу увагу нелінійному випадку.

лідок вібраційних навантажень U-подібних труб парогенераторів на атомних електростанціях.

У зносоконтактних задачах пружний півпростір часто моделюється основою Вінклерівського типу. Таку модель використано науковцями I. Argatov [6], S. Garcin, S. Baydoun, P. Arnaud, S. Fouvry [8], I. G. Goryacheva [9], J. Hu, F. Gao, X. Liu, Y. Wei [11], N. Menga, M. A. Ciavarella [14], P. Pödra, S. Andersson [16]. З метою аналізу ефективності вибраної моделі в роботах [8, 11, 14, 16] проводяться розрахунки на основі цієї моделі, а також інших моделей, які передбачають використанням специфічних для них методів, зокрема, методу скінченних елементів. Виявлено прийнятну узгодженість результатів, що свідчить про ефективність моделі Вінклера в зносоконтактних задачах. Саме цю модель використаємо тут.

Відомо [9; 15] про наявність двох основних стадій зношування – припрацювання й усталеного зносу. На стадії усталеного зносу розглянемо контактну задачу про зношування півпростору, що моделюється основою Вінклерівського типу, внаслідок руху по ньому прямокутного в плані штампа.

У роботі [9] виведено розв'язувальні рівняння цієї задачі, наведено формули розв'язку у випадку лінійного закону зношування й отримано числові результати для штампа з плоскою підшвою та в одному з випадків неплоского штампа, якому відповідає рівномірна функція зносоконтактного тиску. Зазначені формули використаємо тут для отримання контактних характеристик лінійного закону зношення для штампів із неплоскою підшвою різної форми.

Розв'язок поставленої задачі у випадку нелінійного (степеневого) закону зношування в опублікованих роботах не знайдено. Спираючись на два типи подання розв'язувального рівняння як диференціального або інтегрального, дослідимо випадки отримання наближено-аналітичного або чисельного розв'язків.

Мета роботи – дослідити методи розв'язання рівнянь задачі про усталений знос пружної основи Вінклерівського типу прямокутним у плані штампом, отримати числові результати для штампів з підшвою різної форми та провести аналіз впливу вхідних параметрів на зносоконтактні характеристики.

1. Загальна постановка задачі та рівняння, що її моделюють. Розглянемо півпростір, з яким пов'яжемо систему координат (x_1, y_1, z_1) , та штамп у рухомій системі (x, y, z) (рис. 1) [9]. Форма штампа є такою, що розріз площиною $x = \text{const}$ являє собою прямокутник. Штамп втискається у півпростір нормальною постійною силою P та рухається зі сталою швидкістю V в напрямку осі Ox , унаслідок чого поверхня півпростору зношується.

Припустимо, що в будь-який момент часу основа штампа всіма точками контактує з півпростором.

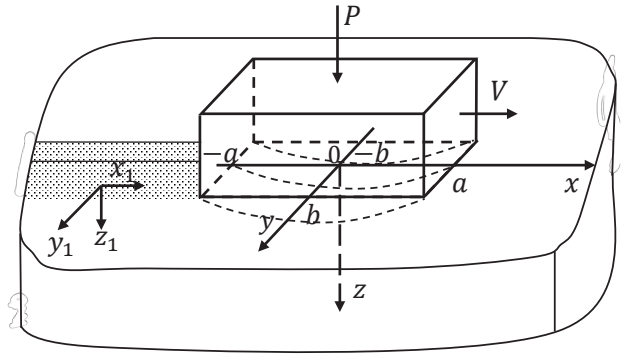


Рис. 1. Схема контактної взаємодії

Розглянемо функцію зносу півпростору $w_*(x_1, y_1, t)$. У загальному випадку залежність швидкості зносу від контактного тиску $p(x_1, y_1, t)$ визначається законом [5; 9]

$$\frac{\partial w_*}{\partial t}(x_1, y_1, t) = K_w p^\alpha(x_1, y_1, t) V^\beta(x_1, y_1, t), \quad (1)$$

де K_w – коефіцієнт зношування, що залежить від умов контакту, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$ – параметри закону зношування. При цьому параметр $\alpha > 1$ відповідає степеневому закону зношування, а $\alpha = 1$ – лінійному.

У рухомій системі координат, пов'язаній зі штампом, областю контакту є прямокутник на площині Oxy :

$$\Omega = [-a; a] \times [-b; b],$$

де $a > b$. Відомо [7; 9], що для штампа обраної форми у всіх точках площадки контакту $(x, y) \in \Omega$ функція тиску визначається формулою

$$p(x, y) = \frac{p_1(x)}{\pi \sqrt{b^2 - y^2}}.$$

У цій роботі, як і в роботах [8, 9, 11, 14, 16], півпростір моделюємо основою Вінклера, яка для цієї задачі визначається залежністю [9]

$$p_1(x) = k w_1(x), \quad (3)$$

$$k = \frac{\pi E}{2(1 - \nu^2) \lg\left(\frac{a}{b}\right)},$$

де E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона півпростору відповідно.

Таким чином, задачу зведено до плоскої постановки, яка потребує визначення контактних характеристик у площині $y = 0$. Тут розглядатимемо стадію усталеного зносу [9].

Зважаючи на припущення про повний контакт штампа з півпростором у будь-який момент часу, розглянемо ту точку $(x_1, 0)$ на межі півпростору, яка в момент часу $t = 0$ вступає в контакт [9], тоді $x_1 = a$; позначимо через $t(x)$ той момент часу, коли точка $(x, 0)$ в системі координат Oxy збіга-

тиметься з точкою $(x_1, 0)$; тоді $t(x) = \frac{a-x}{V}$, звідки $x = a - V \cdot t(x)$. У рухомій системі координат Oxy уведемо функції, що не залежать від часу:

$$W_*(x) = w_*(a, 0, t(x)), \quad W_*(x) = 0, \quad \text{якщо } x > a, \\ p_s(a - Vt) = p(a, 0, t).$$

Унаслідок цього співвідношення (1) перепишемо у вигляді [9]

$$W_*(x) = K_w V^{\beta-1} \int_x^a p_s^\alpha(x') dx'. \quad (4)$$

З (2), (3) та означення функцій $p_s(x)$ випливає, що

$$w_1(x) = \frac{\pi b}{k} p_s(x). \quad (5)$$

Умова контакту штамп з пружним півпростором в рухомій системі координат Oxz задається рівнянням [9]:

$$W_*(x) + w_1(x) = D - f(x), \quad (6)$$

де $f(x)$ – функція, що визначає поверхню штамп в площині $y = 0$, а D – осадка штамп. Враховуючи (4) та (5) та позначення

$$K_* = K_w V^{\beta-1}, \quad (7)$$

отримаємо рівняння [9]

$$K_* \int_x^a p_s^\alpha(x') dx' + \frac{\pi b}{k} p_s(x) = D - f(x);$$

продиференціюємо рівняння (8), одержимо

$$K_* p_s^\alpha(x) - \frac{\pi b}{k} p_s'(x) = f'(x). \quad (8)$$

Зважаючи на співвідношення (2) та означення функції $p_s(x)$, отримаємо

$$p_s(x) = p_s(a - Vt) = \frac{p_1(x)}{\pi \sqrt{b^2 - y^2}} \Big|_{y=0} = \frac{p_1(x)}{\pi b}.$$

Розглянемо рівняння рівноваги сил у загальному вигляді та спростимо його з використанням (10):

$$P = \oint p(x, y) dx dy = \int_{-b}^b \frac{dy}{\pi \sqrt{b^2 - y^2}} \int_{-a}^a p_1(x) dx = \pi b \int_{-a}^a p_s(x) dx.$$

Тоді умова рівноваги відносно функції $p_s(x)$ набуде вигляду:

$$\int_{-a}^a p_s(x) dx = P_0, \quad (11)$$

$$P_0 = \frac{P}{\pi b}.$$

Для переходу до безрозмірних величин покладемо [9]

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \tilde{p}_s(\xi) = \frac{\pi b p_s(a\xi)}{ka}, \quad \tilde{f}(\xi) = f(\xi a), \quad \tilde{W}_*(\xi) = \frac{W_*(a\xi)}{a},$$

$$\kappa = K_* \left(\frac{ak}{\pi b} \right)^\alpha = K_w V^{\beta-1} \left(\frac{aE}{2(1-\nu^2)b \lg\left(\frac{a}{b}\right)} \right)^\alpha, \quad \tilde{P} = \frac{K_* P_0}{a},$$

тоді диференціальне рівняння (9) та умова рівноваги (11) набудуть вигляду:

$$\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi) - \tilde{p}_s'(\xi) = \tilde{f}'(\xi), \quad (12)$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}_s(\xi) d\xi = \tilde{P}. \quad (13)$$

Рівняння (12) та (13) дають змогу знайти функцію $\tilde{p}_s(\xi)$. Для отримання цієї функції іншим способом, а також для визначення безрозмірної осадки штамп $\tilde{D} = \frac{D}{a}$ перепишемо інтегральне рівняння (8) в безрозмірних величинах

$$\kappa \int_{-1}^1 \tilde{p}_s^\alpha(\xi') d\xi' + \tilde{p}_s(\xi) = \tilde{D} - \tilde{f}(\xi).$$

Застосуємо співвідношення (4), щоб знайти формулу відносно безрозмірної функції зношування [9]

$$\tilde{W}_*(\xi) = \kappa \int_{-1}^1 \tilde{p}_s^\alpha(\xi') d\xi'. \quad (15)$$

За припущенням, у кожен момент часу підшва штамп має контактувати з поверхнею півпростору всіма точками. Для цього щонайменше необхідно накласти умову $\tilde{f}(\xi) \geq 0$ для всіх $\xi \in [-1; 1]$.

2. Відомі формули розв'язку задачі за лінійного закону зношування півпростору. За лінійного закону зношування, що відповідає показнику $\alpha = 1$, розв'язок задачі наведено в роботі [9]. Диференціальне рівняння (12) у цьому випадку є лінійним і має за загальний розв'язок функцію

$$\tilde{p}_s(\xi) = e^{\kappa\xi} \left(C - \int_{-1}^{\xi} \tilde{f}'(\xi') e^{-\kappa\xi'} d\xi' \right). \quad (16)$$

Невідома стала знайдена з умови рівноваги (13) у формі [9]:

$$C = \frac{1}{2sh\kappa} \left(\kappa \tilde{P} + \int_{-1}^1 \tilde{f}'(\xi') (e^{\kappa(1-\xi')} - 1) d\xi' \right). \quad (17)$$

У зазначеній роботі на стадії усталеного зносу визначено функцію тиску у випадку штамп з плоскою підшвою, тобто якщо $\tilde{f}'(\xi) = 0$,

$$\tilde{p}_s(\xi) = \frac{\kappa \tilde{P}}{2sh\kappa} e^{\kappa\xi}, \quad (18)$$

та функцію зношування

$$\tilde{W}_*(\xi) = \frac{\kappa \tilde{P}}{2sh\kappa} (e^\kappa - e^{\kappa\xi}). \quad (19)$$

Там також наведено графіки функцій (18) та (19) для різних параметрів κ .

Нижче застосовуватимемо формули (16), (17) та (15) для отримання зносоконтактних характеристик для штампів із неплоскою основою з метою порівняння результатів за різних законів зношування.

3. Наближений розв'язок задачі за степеневому закону зношування півпростору штампом із плоскою підшвою.

Аналітичний розв'язок диференціального рівняння. Розглянемо випадок штамп з плоскою підшвою $\tilde{f}(\xi) = 0$. Тоді рівняння (12) набуває вигляду

$$\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi) - \tilde{p}_s'(\xi) = 0. \quad (20)$$

Оскільки $\alpha > 1$, то рівняння (20) має аналітичний розв'язок вигляду

$$\tilde{p}_s(\xi) = \left(\frac{1}{(1-\alpha)(\kappa\xi + C)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

визначений за умови

$$\kappa\xi + C < 0.$$

Для отримання невідомого коефіцієнта C потрібно застосувати умову рівноваги (13). Обчислення інтеграла реалізуємо двома способами – аналітичним і чисельним із метою подальшого порівняння результатів.

Використання аналітичного значення інтеграла в рівнянні рівноваги. Обчислимо інтеграл аналітично й підставимо результат в умову рівноваги (13):

$$\frac{\alpha-1}{\alpha-2} \left(\frac{1}{\alpha-1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left\{ (\kappa-C)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} - (-\kappa-C)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} \right\} - \tilde{P} = 0. \quad (21)$$

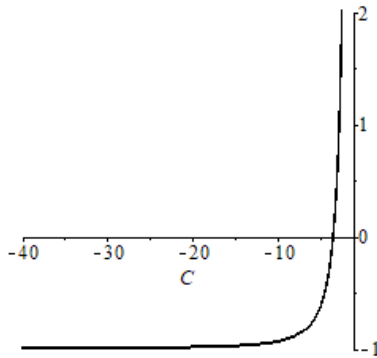


Рис. 2. Графічне подання функції $\psi(C)$, що відповідає лівій частині рівняння (21)

Для розв'язання рівняння (21) застосовуємо метод половинного ділення. Ліва частина рівняння (21) визначає функцію змінної C , яку позначимо $\psi_{\alpha,\kappa}(C)$. Існування єдиного розв'язку перевіряємо чисельним експериментом. А саме: для кожного набору вибраних для розрахунку вхідних параметрів α, κ будемо функції $\psi_{\alpha,\kappa}(C)$, у кожному з випадків отримуємо зростаючу функцію, яка перетинає вісь OC в одній точці проміжку $C \in (-\infty; -\kappa)$, що дає змогу дійти висновку про єдиність розв'язку рівняння (21), а також визначити відрізок зміни знака функції $\psi_{\alpha,\kappa}(C)$ для застосування методу половинного ділення. Для ілюстрації зазначеного підходу на рис. 2 побудовано графік такої функції для вхідних параметрів $\alpha = 1.4, \kappa = 1, \tilde{P} = 1$.

Таким чином, розв'язок цієї задачі визначається однозначно. Таке саме дослідження проводиться і в подальших випадках застосування методу половинного ділення.

Використання чисельного значення інтеграла в рівнянні рівноваги. Метод квадратур чисельного

інтегрування реалізуємо із застосуванням правих прямокутників, що зводить рівняння рівноваги (13) до вигляду

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{p}_s(\xi_k)(\xi_k - \xi_{k-1}) = \tilde{P}.$$

Невідому сталу знаходимо методом половинного ділення.

Функція профілю зношеної поверхні півпростору визначається формулою (15) як функція нижньої межі інтегрування. Для графічного подання функції знаходимо її значення в точках розбиття $\xi_k = -1 + \frac{2k}{n}, k = \overline{0, n}$ відрізка $[-1; 1]$. На кожному з відрізків $[\xi_k; 1]$ реалізуємо чисельне інтегрування.

Порівняльний аналіз числових результатів, отриманих різними підходами, проведемо на прикладі вибору параметрів $\alpha = 1.4, \kappa = 1, \tilde{P} = 1$. У випадку аналітичного обчислення інтеграла невідома стала отримала значення

$$C_{analit} = -3.470023157.$$

Чисельне інтегрування проводилося для різної кількості N відрізків розбиття проміжку $[-1; 1]$. Результати щодо отриманих значень невідомої константи наведено в табл. 1.

Таблиця 1
Значення константи, обчислені з використанням чисельного інтегрування, для різних N

	N		$C_{numeric}$
	20	-3.419547081	
	100	-3.460005761	
	200	-3.465020179	
	500	-3.468024257	
	1000	-3.469023705	

В обох способах розв'язання метод половинного ділення використовувався з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

Відхилення між результатами у двох способах обчислення інтеграла становлять: якщо $N = 20$ – до 1.5 %, якщо $N = 100$ – до 0.3 %, якщо $N = 1000$ – до 0.0003 %. Отже, використання $N = 100$ визначає високий рівень узгодження.

Для ілюстрації результатів розрахунків і порівняння контактних характеристик, що відповідають лінійному та степеневому законам зношування, вибрано параметри $\alpha = 1$ та $\alpha = 1.4$ відповідно та безрозмірну силу $\tilde{P} = 1$. На рис. 3 наведено графіки функцій тиску (рис. 3, а) та профілю зношеної поверхні (рис. 3, б). Штриховими лініями зображено графіки для лінійного закону, знайдені за формулами (18) та (19), а суцільними лініями – для степеневого. Останні відповідають розрахункам із використанням аналітичного інтегрування.

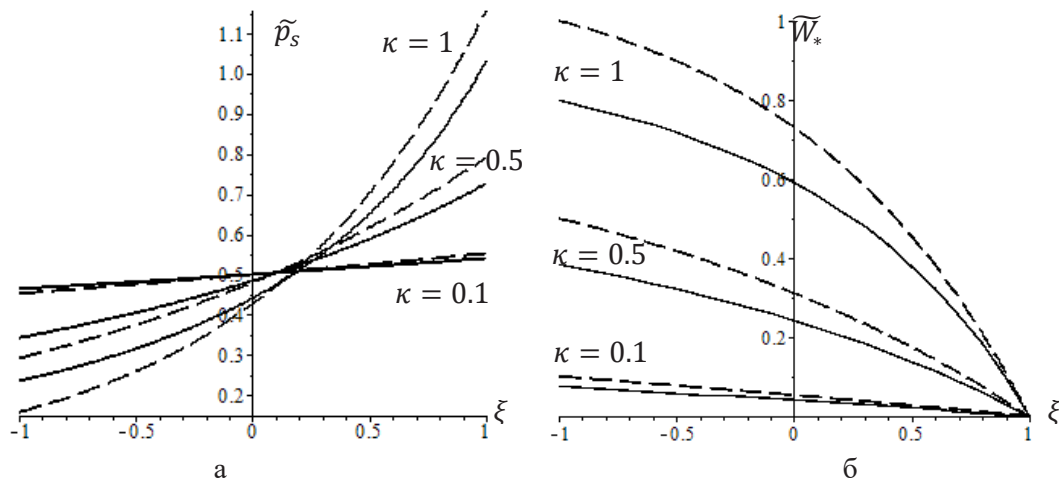


Рис. 3. Зносоконтактні характеристики під штампом з плоскою підшвою за степеневого та лінійного законів зношування

4. Випадок степеневого закону зношування півпростору штампом із неплоскою підшвою. Однозначність розв'язку задачі у випадку нелінійного закону зношування дослідимо, використовуючи подання розв'язувального рівняння задачі як інтегральне рівняння (14). Це нелінійне рівняння типу Вольтерра другого роду. Воно має єдиний розв'язок у просторі $C_{[-1;1]}$ функцій, неперервних на відрізку $[-1;1]$. Покажемо це. Розглянемо нелінійний оператор $Ay(\xi) = \kappa \int_{-1}^{\xi} y^{\alpha}(\xi') d\xi'$. Проведемо оцінювання з використанням формули Лагранжа за функціональним аргументом

$$|Ay(\xi) - A\bar{y}(\xi)| \leq \kappa \alpha (1 - \xi) \bar{y} - \bar{y}.$$

Тоді для натурального $k > 1$ матимемо

$$|A^k \bar{y}(\xi) - A^k \bar{y}(\xi)| \leq \kappa^k \alpha^k \frac{(1 - \xi)^k}{k!} \bar{y} - \bar{y};$$

$$A^k \bar{y} - A^k \bar{y} \leq \kappa^k \alpha^k \frac{2^k}{k!} \bar{y} - \bar{y}.$$

Отже, для деякого степеня k буде виконуватися нерівність $\kappa^k \alpha^k \frac{2^k}{k!} < 1$, разом із чим оператор A^k буде стискаючим, а рівняння (14) буде мати єдиний розв'язок, який можна знайти методом послідовних наближень

$$\bar{p}_{s,n+1}(\xi) = -\kappa \int_{-1}^{\xi} \bar{p}_{s,n}^{\alpha}(\xi') d\xi' - \tilde{f}(\xi) + \tilde{D}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

де за перше наближення можна обрати довільну функцію простору $C_{[-1;1]}$.

Оскільки рівняння (12) та (14) еквівалентні, то розв'язки обох збігаються, тож визначаються однозначно.

Розв'язання нелінійного диференціального рівняння методом скінченних різниць реалізуємо двома способами. Розглянемо два види різнице-

вих відношень першого порядку – ліві та праві. Розіб'ємо відрізок інтегрування $[-1;1]$ на N рівних частин точками

$$\xi_k = -1 + kh, \quad h = \frac{2}{N}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Наближене значення похідної в точці розбиття ξ_k може бути виражене лівими скінченними різницями

$$\tilde{p}'_s(\xi_k) = \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k-1}) - \tilde{p}_s(\xi_k)}{-h}, \quad k = \overline{1, N},$$

або правими –

$$\tilde{p}'_s(\xi_k) = \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k+1}) - \tilde{p}_s(\xi_k)}{h}, \quad k = \overline{0, N-1},$$

Для лівих і правих скінченних різниць диференціальне рівняння (12) в наближеному вигляді в точках ξ_k запишеться у формах відповідно

$$\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_k) - \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k-1}) - \tilde{p}_s(\xi_k)}{-h} = \tilde{f}'(\xi_k), \quad k = \overline{1, N} \quad (23)$$

або

$$\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_k) - \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k+1}) - \tilde{p}_s(\xi_k)}{h} = \tilde{f}'(\xi_k), \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (24)$$

Перепишемо систему (23) в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{p}_s(\xi_{N-1}) &= -h\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_N) + \tilde{p}_s(\xi_N) + h\tilde{f}'(\xi_N), \\ \tilde{p}_s(\xi_{N-2}) &= -h\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_{N-1}) + \tilde{p}_s(\xi_{N-1}) + h\tilde{f}'(\xi_{N-1}), \\ &\dots \\ \tilde{p}_s(\xi_{k-1}) &= -h\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_k) + \tilde{p}_s(\xi_k) + h\tilde{f}'(\xi_k) \quad (k = \overline{1, N}), \\ &\dots \\ \tilde{p}_s(\xi_1) &= -h\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_2) + \tilde{p}_s(\xi_2) + h\tilde{f}'(\xi_2), \\ \tilde{p}_s(\xi_0) &= -h\kappa \tilde{p}_s^{\alpha}(\xi_1) + \tilde{p}_s(\xi_1) + h\tilde{f}'(\xi_1), \end{aligned}$$

що дає змогу виразити всі невідомі $\tilde{p}_s(\xi_k)$ ($k = \overline{1, N}$) через $\tilde{p}_s(\xi_N)$.

Систему (24) запишемо у такий спосіб

$$\begin{aligned}\tilde{p}_s(\xi_1) &= h\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi_0) - \tilde{p}_s(\xi_0) - h\tilde{f}'(\xi_0), \\ \tilde{p}_s(\xi_2) &= h\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi_1) - \tilde{p}_s(\xi_1) - h\tilde{f}'(\xi_1), \\ &\dots \\ \tilde{p}_s(\xi_{k+1}) &= h\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi_k) - \tilde{p}_s(\xi_k) - h\tilde{f}'(\xi_k) \quad (k = \overline{0, N-1}), \\ &\dots \\ \tilde{p}_s(\xi_{N-1}) &= h\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi_{N-2}) - \tilde{p}_s(\xi_{N-2}) - h\tilde{f}'(\xi_{N-2}), \\ \tilde{p}_s(\xi_N) &= h\kappa \tilde{p}_s^\alpha(\xi_{N-1}) - \tilde{p}_s(\xi_{N-1}) - h\tilde{f}'(\xi_{N-1}),\end{aligned}$$

і виражаємо всі $\tilde{p}_s(\xi_k)$ ($k = \overline{1, N}$) через $\tilde{p}_s(\xi_0)$.

Значення функції тиску в кожній точці розбиття виражається через одну невідому величину $\tilde{p}_s(\xi_N)$ або $\tilde{p}_s(\xi_0)$ залежно від вибору лівих чи правих скінченних різниць. У кожному випадку невідому шукаємо з умови рівноваги, у ній інтеграл обчислюємо методом трапецій із використанням знайдених вище $\tilde{p}_s(\xi_k)$. Рівняння рівноваги в обох випадках набуває вигляду

$$\tilde{P} = \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{p}_s(\xi_{k-1}) + \tilde{p}_s(\xi_k)}{2} h.$$

Воно визначає нелінійне алгебраїчне рівняння відносно зазначених невідомих. Розв'язуємо його методом половинного ділення.

У підсумку отримаємо значення функції тиску в точках розбиття $\xi_k, k = \overline{0, N}$ відрізка $[-1; 1]$.

Дискретизована функція профілю зношеної поверхні півпростору. Функція профілю визначаємо за формулою (15) у точках $\xi_k, k = \overline{0, N}$, обчислюючи інтеграл із використанням, наприклад, формули лівих прямокутників

$$\tilde{W}_s(\xi_k) = \kappa \sum_{j=k}^{N-1} \tilde{p}_s^\alpha(\xi_j) h.$$

Порівняльний аналіз числових результатів, отриманих різними підходами, проведемо для параметрів $\alpha = 1.4$, $A = 0.05$, $\kappa = 0.1$, $\tilde{P} = 1$. Графіки функцій контактної тиску зображено на рис. 4. Розв'язок, отриманий з вибором $N = 20$ відрізків розбиття з використанням лівих скінченних різниць, зображено штриховою лінією, а правих – штрих-пунктирною; результати, отримані з використанням лівих і правих скінченних різниць, якщо $N = 100$, показано сірою суцільною та точковою лініями відповідно. Відхилення між значеннями, розрахованими, якщо $N = 20$, становить до 2.3 %, а якщо $N = 100$ – до 0.4 %.

Застосування методу послідовних наближень до розв'язувального інтегрального рівняння. Розглянемо систему, що складається з інтегрального рівняння (14) та умови рівноваги (13).

Позначимо $C_0 = \tilde{p}_{s,n}(0)$. Чисельний експеримент попередніх розрахунків підтверджує справедливості нерівності

$$\frac{\tilde{p}_s(\xi) - C_0}{C_0} < 1. \quad (25)$$

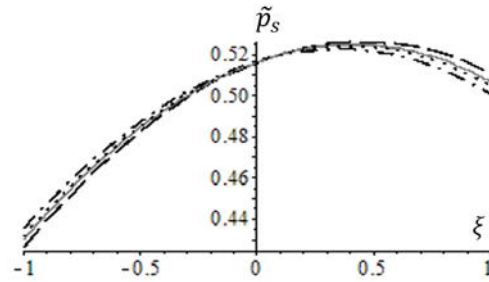


Рис. 4. Порівняння функцій контактної тиску, обчислених із використанням правих і лівих скінченних різниць

Це дає змогу подати функцію $\tilde{p}_s^\alpha(\xi)$ за допомогою ряду

$$(1+u)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \frac{\alpha-j+1}{j} u^k, |u| < 1. \quad (26)$$

Покладемо

$$u(\xi) = \frac{\tilde{p}_{s,n}(\xi) - C_0}{C_0},$$

тоді

$$\tilde{p}_s^\alpha(\xi) = C_0^\alpha \left(1 + \frac{\tilde{p}_s(\xi) - C_0}{C_0} \right)^\alpha = C_0^\alpha \left(1 + \sum_{k=1}^N \prod_{j=1}^k \frac{\alpha-j+1}{j} u^k(\xi) \right).$$

Крім того, функцію $\tilde{f}(\xi)$ подаємо рядом, який наближено замінюємо многочленом $M_m(\xi)$ такого степеня m , щоб $|M(\xi) - \tilde{f}(\xi)| < 10^{-6}$ для всіх $\xi \in [-1; 1]$. Таке подання функцій дає змогу позбутися від нецілих степенів, спростити інтегрування. У підсумку послідовні наближення (22) набувають вигляду

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{s,n+1}(\xi) &= -\kappa \int_{\xi}^1 C_0^\alpha \left(1 + \sum_{k=1}^N \prod_{j=1}^k \frac{\alpha-j+1}{j} u^k(\xi') \right) d\xi' + \tilde{D} - M_m(\xi), \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \quad \tilde{p}_{s,1}(\xi) = \tilde{D},\end{aligned}$$

а розв'язком стає поліноміальна функція, що містить невідому $\tilde{D}$.

Зауважимо, що потрібно відслідковувати виконання умови (25) на кожному ітераційному кроці.

Метод половинного ділення розв'язання рівняння рівноваги (13) відносно $\tilde{D}$ реалізовувати мемо одночасно з методом послідовних наближень.

Функцію профілю зношеної поверхні півпростору знаходимо аналогічно до розділу 3.

Для реалізації зазначеного підходу використано систему комп'ютерної алгебри. Символьні обчислення системи призводять до того, що послідовні наближення суттєво накопичують аналітичні функції степеневих вигляду, переважуючи ресурс системи. Саме за цієї причини вибираємо $N = 5$, а також обчислюємо п'ять послідовних наближень. Не для всіх параметрів κ вибрана кількість послідовних наближень забезпечує збіжність ітераційного процесу. Далі наведемо числовий результат для $\kappa = 0.1$, для якого

порядок збіжності становить $\kappa^N \alpha^N \frac{2^N}{N!}$. Інші параметри – $\alpha = 1.4$, $A = 0.05$, $\tilde{P} = 1$.

Наведені на рис. 5 графіки функції тиску дають змогу порівняти результати, знайдені різними підходами. А саме:

– точковим лініям відповідають графіки функцій-розв'язків диференціального рівняння, до якого застосовано методи лівих і правих скінченних різниць відповідно за вибору 100 відрізків розбиття;

– суцільною сірою – розв'язок інтегрального рівняння, отриманий методом послідовних наближень.

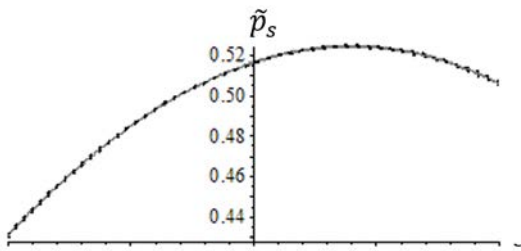


Рис. 5. Порівняння функцій тиску, обчислених із використанням скінченних різниць і методу послідовних наближень

Відхилення між результатами, отриманими за першим і другим підходами, не перевищує 0.25 %.

Застосування методу степеневих рядів до розв'язувального інтегрального рівняння. Розв'язок інтегрального рівняння (14) подаємо степеневим рядом

$$\tilde{p}_s(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_j \xi^j + \dots, \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (27)$$

Здійснено перетворення

$$\tilde{p}_s(\xi) = a_0 (1 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \dots + b_j \xi^j + \dots),$$

де $b_j = \frac{a_j}{a_0}$, $j = 1, 2, 3, \dots$. У розкладі (26) покладемо

$$u = b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \dots + b_j \xi^j + \dots,$$

отримаємо

$$\tilde{p}_s^{\alpha}(\xi) = a_0^{\alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \frac{\alpha - j + 1}{j} (b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \dots + b_j \xi^j + \dots)^k \right).$$

Реалізуємо групування доданків за відповідними степенями ξ і виявляємо закономірність:

$$\tilde{p}_s^{\alpha}(\xi) = a_0^{\alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \xi^k \right), \quad (28)$$

де

$$m, k = \prod_{j=1}^{k-m+1} \frac{\alpha - j + 1}{j}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, \dots, k;$$

$$a_{k,k} = b_k, a_{k,m} = \sum_{j=1}^m a_{k-j, m-j+1} b_j, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$\gamma_k = \sum_{m=1}^k m, k a_{k,m}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Подамо розклад у ряд функції $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k.$$

Підставимо (27) та (28) до рівняння (14), виконавши інтегрування

$$\kappa a_0^{\alpha} \left(\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k+1} \right) - \left(\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{\xi^{k+1}}{k+1} \right) \right) + a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi^k \right) = \tilde{D} - c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^k.$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових степенів ξ , приходимо до системи

$$\kappa a_0^{\alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k+1} \right) + a_0 = \tilde{D} - c_0;$$

$$-\kappa a_0^{\alpha} + a_0 b_1 = -c_1;$$

$$-\kappa a_0^{\alpha} \frac{\gamma_1}{2} + a_0 b_2 = -c_2;$$

...

$$-\kappa a_0^{\alpha} \frac{\gamma_{k-1}}{k} + a_0 b_k = -c_k \quad (k = 3, 4, 5, \dots).$$

Звідки спочатку виразимо коефіцієнти $\{b_k\}$

$$b_1 = \kappa a_0^{\alpha-1} - \frac{c_1}{a_0};$$

$$b_2 = \kappa a_0^{\alpha-1} \frac{\gamma_1}{2} - \frac{c_2}{a_0};$$

...

$$b_k = \kappa a_0^{\alpha-1} \frac{\gamma_{k-1}}{k} - \frac{c_k}{a_0} \quad (k = 3, 4, 5, \dots),$$

після чого отримаємо формулу для обчислення $\tilde{D}$

$$\tilde{D} = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Підставимо розклад (28) до умови рівноваги, прийдемо до рівняння

$$\tilde{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2a_{2k}}{2k+1}. \quad (29)$$

Зауважимо, що кожен коефіцієнт a_k нелінійно залежить від a_0 , тому рівняння (29) визначає нелінійне алгебраїчне рівняння відносно a_0 , до розв'язання якого застосовуємо метод половинного ділення.

Оскільки функція $\tilde{p}_s^{\alpha}(\xi)$ подається степеневим рядом (28), то функція профілю зношеної поверхні, визначена формулою (15), також подається степеневим рядом

$$\tilde{W}_s(\xi) = \kappa a_0^{\alpha} \left(\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k+1} \right) - \left(\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{\xi^{k+1}}{k+1} \right) \right).$$

Для отримання наближеного розв'язку часткова сума степеневого ряду (28) замінюється сумою з 40 доданків, відповідно до цього всі ряди описаного підходу замінюються частковими сумами. Якщо було вибрано 100 доданків суми, результати відрізнялися на шостій значущій цифрі.

Вибираємо ті самі вхідні данні, що і в усьому розділі 4, для порівняння результатів. На рис. 6, а зображено графіки функцій тиску. Точковим лініям відповідають результати, отримані з використанням лівих і правих скінченних різниць (за

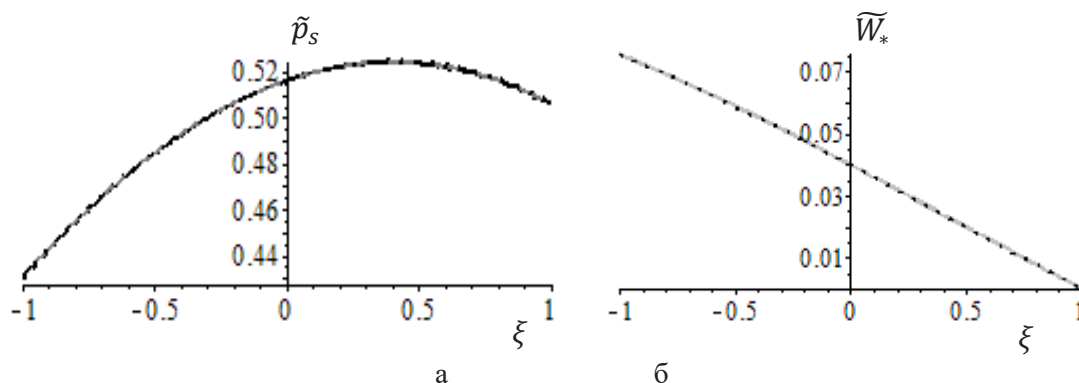


Рис. 6. Порівняння зносоконтактних характеристик, отриманих за різними підходами

кількості відрізків розбиття – 100), штрих-пунктирний – методу послідовних наближень, суцільний сірий – методу степеневих рядів, застосовані до тих розв’язувальних рівнянь, яким вони відповідають. Для вибраних вхідних параметрів графіки функцій профілів зношеної поверхні, зображені на рис. 6, б, візуально близькі.

5. Аналіз числових результатів для різних вхідних параметрів

Наведені нижче результати розраховані, якщо $\bar{P} = 1$. Для дослідження степеневому закону вибирається $\alpha = 1.4$, лінійного – $\alpha = 1$. На всіх поданих нижче рисунках з позначкою «а» наведено графіки функцій контактного тиску, з позначкою «б» – профілів зношеної поверхні, а значення параметра κ підписано поруч із графіками, що йому відповідають.

Результати, наведені для лінійного закону, знайдено за допомогою відомих формули (16), (17) та (15).

Випадок штамп з неплоскою основою, визначеного квадратичною функцією. Розглянемо задачу про зношування півпростору прямокутним у плані штампом, що рухається вздовж осі абсцис і має підшову, визначену невід’ємною функцією $\tilde{f}(\xi) = A\xi^2 + \text{const}$. Наведені вище висновки свідчать про незначні відхилення в результатах, отриманих різними методами. Додатковий аналіз показав, що для підшови штамп, що визначається квадратичною функцією, найбільше відхилення не перевищують 1 %. Значення, розраховані за допомогою методу степеневих рядів, є «усередненими», отриманими іншими методами, саме тому для наведених нижче розрахунків віддано перевагу зазначеному методу.

Проведемо аналіз впливу закону зношування. Беремо $A = 0.05$. На рис. 7 штрих-пунктирним лініям відповідає лінійний закон зношування, суцільним – степеневий. Нелінійний закон зношування впливає на урівномірнення контактного тиску та зменшення зношування півпростору під штампом. Той самий висновок дасть і аналіз рис. 4 для штамп з плоскою підшовою.

За результатами, наведеними на рис. 7, проведемо аналіз впливу параметра κ на зносоконтактні характеристики. Зазначимо, що цей параметр визначає фізичні характеристики півпростору, оскільки виражається через його пружні параметри та коефіцієнт зношування. Зменшення значення параметра κ призводить до зменшення тиску в точці початкового контакту ($\xi = 1$) та збільшення – у кінцевій ($\xi = -1$), а також до зменшення зношення. До аналогічних висновків призводить аналіз зносоконтактних характеристик під штампом із плоскою підшовою (рис. 3).

Проведемо аналіз впливу коефіцієнта A , що визначає функцію поверхні підшови штамп. На рис. 8 значенню $A = 0$ відповідають сірі суцільні лінії, $A = 0.05$ – чорні суцільні, $A = 0.25$ – чорні штрихові.

Оскільки параметр κ відповідає за фізичні властивості півпростору, то півпростір чинитиме найменший «супротив» контактному тиску, якщо $\kappa = 0.1$. Саме тому за цього значення κ можна спостерігати найбільш виражений вплив коефіцієнта A . Якщо для штамп з плоскою підшовою (див. рис. 4) найбільший тиск досягається в точці $\xi = 1$, то для штамп з підшовою, заданою квадратичною функцією, найбільше значення тиску може досягатися у внутрішній точці площадки контакту. За значення $\kappa = 1$ вплив коефіцієнта A стає меншим, а найбільше значення функції тиску спостерігається в точці $\xi = 1$ для всіх A , вибраних для розрахунку. Крім того, коефіцієнт A впливає на напрям опуклості функції тиску. Щодо профілів зношених поверхонь, то параметр A несуттєво впливає на їх якісну поведінку.

З використанням інтегрального рівняння (14) можна отримати осадку штамп $\tilde{D}$. Для невід’ємних функцій $\tilde{f}(\xi) = A\xi^2 + \text{const}$, що визначають форму підшови штамп, припустимо, що значення константи не залежить від A . Занесемо значення $\tilde{D}$ до табл. 2 для різних вхідних параметрів.

Аналізуючи виписані числові результати, доходимо висновку, що степеневий закон зношування

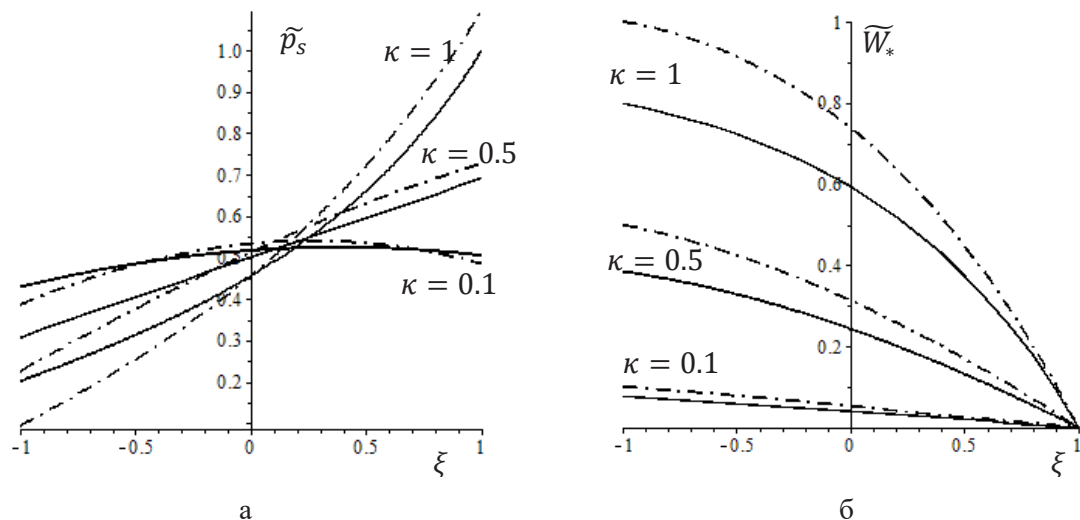


Рис. 7. Зносоконтактні характеристики під штампом, підшова якого визначена квадратичною функцією, для лінійного та степеневих законів зношування та різних κ

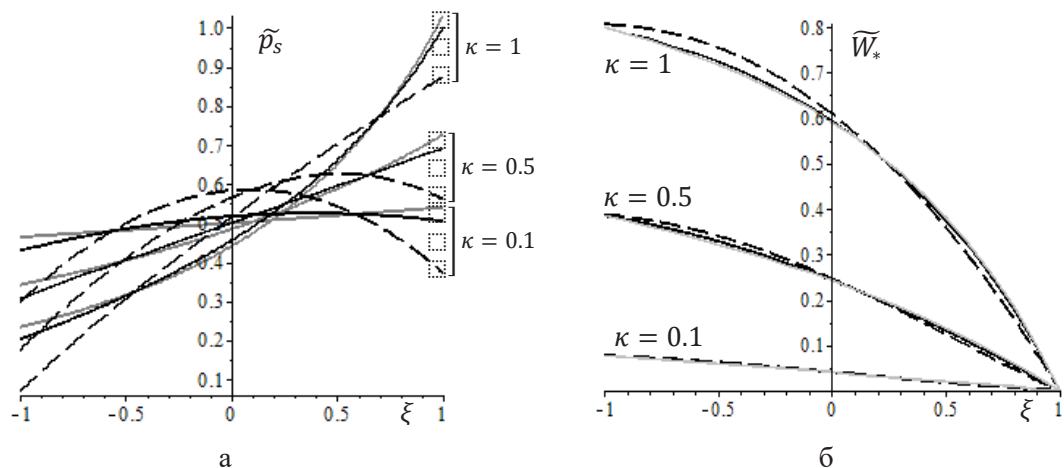


Рис. 8. Зносоконтактні характеристики, отримані для різних параметрів A і κ

впливає на зменшення осадки. Якщо коефіцієнт A фіксований, то більшим значенням параметра κ відповідає більша осадка штамп в пружний півпростір. Так само й більші значення A (за фіксованих κ) визначають більшу осадку штамп.

Випадки штампів з неплоскими підшовами інших типів. Розглянемо спочатку функції

$$\tilde{f}_1(\xi) = A(\xi^4 - \xi^2) + \text{const}$$

та

$$\tilde{f}_2(\xi) = -A \sin(\pi\xi) + \text{const}.$$

Перша має три локальні екстремуми, друга – два.

Із застосуванням методу послідовних наближень розклад функції $f_2(x)$ в степеневий ряд застосовано до 17 степеня включно, у методі степеневих рядів – 39. Для обох випадків в методі скінченних різниць вибрано 100 відрізків розбиття проміжку

Таблиця 2
Безрозмірна осадка штамп $\bar{D}$

	$\kappa = 0.1$	$\kappa = 0.5$	$\kappa = 1$
$\alpha = 1$			
$A = 0.$	0.5516665000	0.7909884384	1.156516960
$A = 0.05$	0.5683539986	0.8081973736	1.175215071
$A = 0.25$	0.6351096838	0.8770359424	1.249998186
$\alpha = 1.4$			
$A = 0$	0.5392540609	0.7253633691	1.030615275
$A = 0.05$	0.5559398642	0.7423833002	1.048729699
$A = 0.25$	0.6228801241	0.8114012421	1.123213126

інтегрування, у методі степеневих рядів функцію тиску подаємо рядом до 40-го степеня включно. Відхилення в розрахункових значеннях, отриманих різними підходами, не перевищувало 1 %.

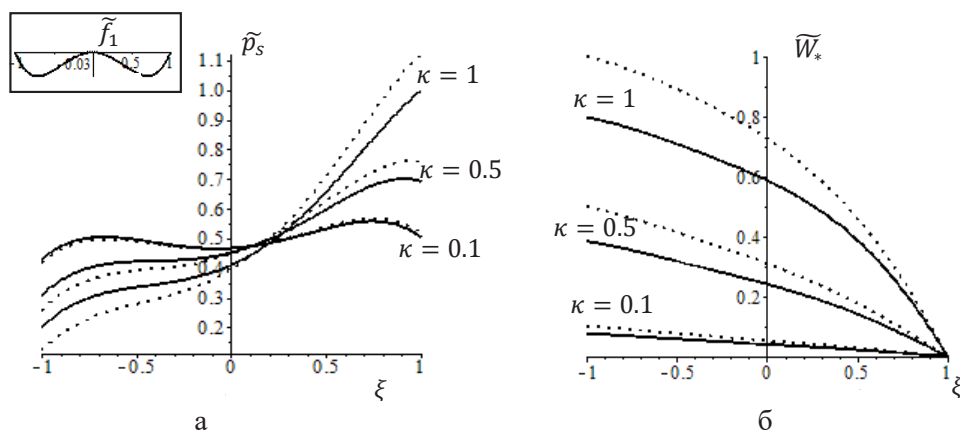


Рис. 9. Зносоконтактні характеристики для неплоского штампа, визначеного функцією $f_1(x)$

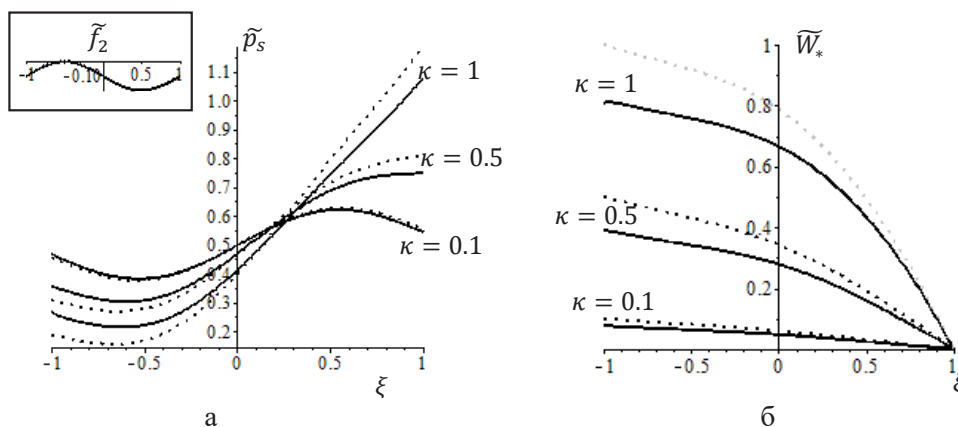


Рис. 10. Зносоконтактні характеристики для неплоского штампа, визначеного функцією $f_2(x)$

Наведені результати відповідають розрахункам із використанням методу степеневих рядів. На рис. 9 і 10 наведено графіки контактних характеристик усталеного зносу півпростору внаслідок руху штампа, визначеного функціями $\tilde{f}_1(\xi)$, якщо $A = 0.25$ та $\tilde{f}_2(\xi)$, якщо $A = 0.1$ відповідно. Суцільним лініям відповідає степеневий закон зношування, а точковим – лінійний.

Вплив вхідних параметрів на контактні характеристики якісно аналогічний зазначеному вище для штампа з квадратичною функції підшви. Особливість полягає у згладжуванні графіка функції тиску на проміжку $\xi \in [0.3; 1]$ за збільшення параметра κ , що визначає фізичні властивості півпростору.

Зауважимо що наближено-аналітичний підхід, який використовує метод степеневих рядів, є неефективним для осцилюючих функцій підшви штампа. Це спричинено збільшенням значень перших коефіцієнтів розкладу в ряд. У таких випадках можна застосувати чисельний підхід, заснований на методі скінченних різниць.

На рис. 11 наведено графіки функцій тиску для неплоского штампа, визначеного функцією

$$\tilde{f}_3(\xi) = A \cos(6\pi\xi) + \text{const},$$

якщо $A = 0.02$. У цьому випадку також спостерігається згладжування функції тиску з наближенням до точки $\xi = 1$.

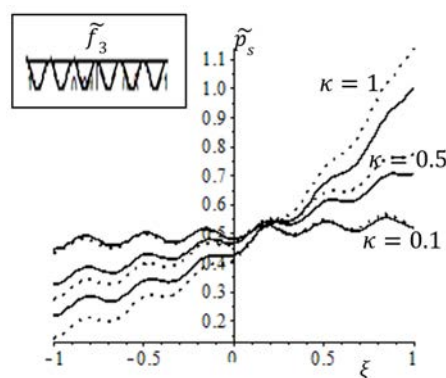


Рис. 11. Зносоконтактний тиск під штампом, визначеним осцилюючою функцією

Висновки. Робота присвячена задачі про зношення основи вінклерівського типу внаслідок руху прямокутного в плані штампа.

Для випадку лінійного закону зношування формули для отримання розв'язку наведено в [9]. Ці формули використано для обчислення контактних характеристик для різних форм неплохих штампів із метою виявлення впливу закону зношування на контактні характеристики.

Найбільша увага в роботі приділяється степеневому закону зношування.

Розв'язувальні рівняння задачі можуть бути подані як диференціальне або еквівалентне йому інтегральне рівняння. Саме дослідженню методів їх розв'язання приділено значну увагу в роботі.

Нелінійне інтегральне рівняння досліджено на існування єдиного розв'язку. Це дало змогу отримати висновок про єдиність розв'язку задачі, який не залежить від застосованих методів.

Нелінійне диференціальне рівняння першого порядку для штампа з плоскою підшоною розв'язано аналітично. Для пошуку невідомої константи використано умову рівноваги, де реалізовано два способи інтегрування – аналітичний і чисельний. В обох випадках рівняння зведено до нелінійного алгебраїчного, яке розв'язано методом половин-

ного ділення.

У випадку штампа з неплоскою підшоною нелінійне диференціальне рівняння розв'язано чисельно методом скінченних різниць, що використовують праві або ліві різниці відношення. До розв'язання відповідного інтегрального рівняння застосовано два підходи: один – заснований на методі послідовних наближень, другий – на наближено аналітичному методі степеневих рядів.

У кожному випадку шукана дискретизована або аналітична (поліноміальна) функція тиску виражається через невідомий параметр. Підстановка такої функції до умови рівноваги зводить її до нелінійного алгебраїчного рівняння, яке розв'язано методом половинного ділення.

Проведено порівняння результатів, отриманих за різними підходами до вибору комбінації методів.

В аналізі числових результатів акцентовано увагу на штампи з неплоскими підшовами різної форми – поліноміальної та тригонометричної. Проведено аналіз зносоконтактних характеристик – функції тиску, профілю зношеної поверхні й осадки штампа – щодо впливу вхідних параметрів. Зокрема, виявлено, що степеневий закон зношування призводить до урівномірення контактного тиску та зменшення зносу поверхні півпростору.

ЛІТЕРАТУРА

1. Д'яченко Н. М., Дмитрів К. М. Вплив закону деформування покриття на характеристики осесиметричної контактної задачі на різних стадіях зношування. *Прикладна механіка*. 2024. Т. 60. № 2. С. 19–31.
2. Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь : колективна монографія / за заг. ред. Р. М. Мартиняка. Львів : Видавець Вікторія Кундельська, 2022. 392 с. URL: <https://www.researchgate.net/publication/366177313>.
3. Онишкевич В. М., Сулим Г. Т. Урахування зношування при плоскому контакті прямокутного штампа з пружною півплощиною. *Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки*. 2019. № 1. С. 138–141. URL: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.31>.
4. Сачук Ю. В., Максимук О. В., Саланда І. П. Аналітико-числове обчислення ітераційними методами областей контакту для задачі про зношування пружної півплощини канонічними штампами. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фіз.-мат. науки*. 2019. Вип. 20. С. 70–78. URL: <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2019-20.70-78>.
5. Archard J.F. Contact and ruing of flat surfaces. *Appl. Phys.* 1953. No. 24. P. 981–988.
6. Argatov I. From Winkler's foundation to Popov's foundation. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 17. Iss. 2. P. 181–190. URL: <http://dx.doi.org/10.22190/FUME190330024A>.
7. Galin L.A. Contact Problems: The legacy of L.A. Galin / Ed. G.M.L. Gladwell. *Solid Mechanics and Its Applications*. 2008. Vol. 155. 332 p.
8. Garcin S., Baydoun S., Arnaud P., Fouvry S. Fretting wear modeling of 3D and 2D Hertzian contacts with a third-body layer using a Winkler elastic foundation model. *Tribology International*. 2022. Vol. 170. Id: 107493. URL: <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2022.107493>.
9. Goryacheva I.G. Contact Mechanics in Tribology / Part of the book series: *Solid Mechanics and Its Applications* (SMIA, volume 61): Series Editor: G.M.L. Gladwell. Springer Science & Business Media, 1998. 346 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9048-8>.
10. Han D., Han W., Jureczka M., Ochal A. Numerical analysis of a contact problem with wear. *Computers & Mathematics with Applications*. Elsevier, 2020. Vol. 79. P. 2942–2951. URL: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.12.027>.

11. Hu J., Gao F., Liu X., Wei Y. An elasto-plastic contact model for conformal contacts between cylinders. *Proceedings of the Institution of mechanical engineers: Part J – Journal of engineering tribology*. 2020. Vol. 234. Iss. 12. P. 1837–1845. URL: <https://doi.org/10.1177/1350650119896461>.
12. Kozachok O.P. Local Friction Wear of an Elastic Half Space with Protrusion. *Mater Sci*. 2022. Vol. 57. P. 797–804. <https://doi.org/10.1007/s11003-022-00611-z>.
13. Lee C.Y., Tian L.S., Bae J.W., Chai Y.S. Application of influence function method on the fretting wear of tube-to-plate contact. *Tribology International*. 2009. Vol. 42. Iss. 6. P. 951–957. URL: <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2009.01.005>.
14. Menga N., Ciavarella M.A. Winkler solution for the axisymmetric Hertzian contact problem with wear and finite element method comparison. *J. Strain Analysis*. 2015. Vol. 50. No. 3. P. 156–162. URL: <http://dx.doi.org/10.1177/0309324714567489>.
15. Páczelt I., Mróz Z. On the analysis of steady-state sliding wear processes. *Tribology International*. 2009. Vol. 42. Iss. 2. P. 275–283. URL: <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2008.06.007>.
16. Pödra P., Andersson S. Wear simulation with the Winkler surface model. *Wear*. 1997. Vol. 207. Iss. 1–2. P. 79–85. URL: [https://doi.org/10.1016/S0043-1648\(96\)07468-6](https://doi.org/10.1016/S0043-1648(96)07468-6).
17. Xuan H., Cheng X. Numerical Analysis and Simulation of a Frictional Contact Problem with Wear, Damage and Long Memory. *East Asian Journal on Applied Mathematics*. 2020. Vol. 10. No. 4. P. 659–678. URL: <https://doi.org/10.4208/eajam.130320.260520>.
18. Zhan W., Huang P. Numerical analysis of time-varying wear with elastic deformation in line contact. *Friction*. 2019. Vol. 7. P. 143–152. URL: <https://doi.org/10.1007/s40544-017-0195-1>.
19. Zhang X., Shen H., Liu J., Deng S., Li X., Cai Z., Zhu M. An efficient numerical model for predicting the torsional fretting wear considering real rough surface. *Wear*. 2015. Vol. 344–345. P. 32–45. URL: <https://doi.org/10.1016/j.wear.2015.10.019>.

REFERENCES

1. Dyachenko, N.M., Dmytriv, K.M. (2024). Vplyv zakonu deformuvannia pokryttia na kharakterystyky osesymetrychnoi kontaktnoi zadachi na riznykh stadiiakh znoshuvannia [Effect of Deformation of Coating on Characteristics of Axisymmetric Contact Problem on Different Stages of Wear]. *Prykladna mekhanika*, 60 (2), 19–31 [in Ukrainian].
2. Martynyak, R.M. (Ed.) (2022). Contact mechanics. Kontaktna mekhanika. Shorstkist, rozsharuvannia i znoshuvannia poverkhon: kolektyvna monohrafiia [Roughness, delamination and wear of surfaces: collective monograph]. Lviv, publusher Victoria Kundelska. <https://www.researchgate.net/publication/366177313> [in Ukrainian].
3. Onyshkevych, V.M., Sulym, G.T. (2019). Urakhuvannia znoshuvannia pry ploskomu kontakti priamokutnoho shtampa z pruzhnoi pivploshchynoi [Consideration of wear in plane contact of rectangular punch and elastic half-plane]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*, 1, 138–141. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.31> [in Ukrainian].
4. Sachuk, Yu.V., Maksimuk, O.V., Salanda, I.P. (2019). Analitiko-chyslove obchyslennia iteratsiinymy metodamy oblasteri kontaktu dlia zadachi pro znoshuvannia pruzhnoi pivploshchyny kanonichnymy shtampamy [Analytical and numerical calculations by iteration method for contact area for the problem of wearing the elastic area by canonical stamps]. *Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences*, 20, 70–78. <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2019-20.70-78> [in Ukrainian].
5. Archard, J.F. (1953). Contact and ruing of flat surfaces. *Appl. Phys.*, 24, 981–988.
6. Argatov, I. (2019). From Winkler's foundation to Popov's foundation. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*, 17 (2), 181–190. <http://dx.doi.org/10.22190/FUME190330024A>.
7. Galin, L.A. (2008). Contact Problems: The legacy of L.A. Galin. Ed. G.M.L. Gladwell. *Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 155.
8. Garcin, S., Baydoun, S., Arnaud, P., Fouvry, S. (2022). Fretting wear modeling of 3D and 2D Hertzian contacts with a third-body layer using a Winkler elastic foundation model. *Tribology International*, 170, id: 107493. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2022.107493>.

9. Goryacheva, I.G. (1998). Contact Mechanics In Tribology / Part of the book series: *Solid Mechanics and Its Applications* (SMIA, volume 61): Series Editor: G.M.L. Gladwell. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9048-8>.
10. Han, D., Han, W., Jureczka, M., Ochal, A. (2020). Numerical analysis of a contact problem with wear. *Computers & Mathematics with Applications*, 79, 2942–2951. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.12.027>.
11. Hu, J., Gao, F., Liu, X., Wei, Y. (2020). An elasto-plastic contact model for conformal contacts between cylinders. *Proceedings of the Institution of mechanical engineers: Part J – Journal of engineering tribology*, 234 (12), 1837–1845. <https://doi.org/10.1177/1350650119896461>.
12. Kozachok, O.P. (2022). Local Friction Wear of an Elastic Half Space with Protrusion. *Mater Sci.*, 57, 797–804. <https://doi.org/10.1007/s11003-022-00611-z>.
13. Lee, C.Y., Tian, L.S., Bae, J.W., Chai, Y.S. (2009). Application of influence function method on the fretting wear of tube-to-plate contact. *Tribology International*, 42 (6) 951–957. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2009.01.005>.
14. Menga, N., Ciavarella, M.A. (2015). Winkler solution for the axisymmetric Hertzian contact problem with wear and finite element method comparison. *J. Strain Analysis*, 50, 3, 156–162. <http://dx.doi.org/10.1177/0309324714567489>.
15. Páczelt, I., Mróz, Z. (2009). On the analysis of steady-state sliding wear processes. *Tribology International*, 42 (2), 275–283. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2008.06.007>.
16. Pödra, P., Andersson, S. (1997). Wear simulation with the Winkler surface model. *Wear*, 207 (1–2), 79–85. [https://doi.org/10.1016/S0043-1648\(96\)07468-6](https://doi.org/10.1016/S0043-1648(96)07468-6).
17. Xuan, H., Cheng, X. (2020). Numerical Analysis and Simulation of a Frictional Contact Problem with Wear, Damage and Long Memory. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, 10 (4), 659–678. <https://doi.org/10.4208/eajam.130320.260520>.
18. Zhan, W., Huang, P. (2019). Numerical analysis of time-varying wear with elastic deformation in line contact. *Friction*, 7, 143–152. <https://doi.org/10.1007/s40544-017-0195-1>.
19. Zhang, X., Shen, H., Liu, J., Deng, S., Li, X., Cai, Z., Zhu, M. (2015). An efficient numerical model for predicting the torsional fretting wear considering real rough surface. *Wear*. 344–345, 32–45. URL: <https://doi.org/10.1016/j.wear.2015.10.019>.

UDC 519.1:656.012.34

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-04>

APPLICATION OF LAGUERRE-VORONOI DIAGRAMS FOR CONSTRUCTION AND OPTIMIZATION OF THE EMERGENCY NOTIFICATION SYSTEM INFRASTRUCTURE FOR THE POPULATION

Pasichnyk A. N.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor at the Department of Mathematical Modeling and System Analysis
Dniprovsky State Technical University
Dniprobudivska str., 2, Kamianske, Dnipropetrovsk region, Ukraine
orcid.org/0000-0002-8561-1374
panukr977@gmail.com*

Ripa M. Ur.

*Postgraduate Student at the Department of Mathematical Modeling and System Analysis
Dniprovsky State Technical University
Dniprobudivska str., 2, Kamianske, Dnipropetrovsk region, Ukraine
orcid.org/0009-0006-0932-1945
ripami25@gmail.com*

Key words: *Laguerre-Voronoi diagram, emergency alert systems, source placement optimization, acoustic waves, sound pressure.*

The relevance of the article is due to the need to develop and improve methods for optimal placement of sound signal sources of emergency alert systems to ensure the effectiveness of their functioning. The development of new approaches will reduce the costs of maintaining and placing such systems, improve their deployment time and provide the population of the alerting area with a normative and more comfortable level of acoustic pressure of sound signals.

The purpose of the study is to develop an algorithm for using Laguerre-Voronoi diagrams to place sound signal sources of the emergency alert system, taking into account acoustic and other parameters that affect the quality of its operation. The article presents the results of modeling and an algorithm for using Laguerre-Voronoi diagrams to optimize the placement of sound signal sources in emergency alert systems. The proposed methodology allows you to model and determine coverage areas taking into account the effective range of alert sources, building density, terrain features and acoustic characteristics of the area. The developed algorithm takes into account the peculiarities of sound wave propagation in an environment with different conditions of acoustic wave absorption, taking into account the peculiarities of the territory's development and the height of the sources, which affect their effective range.

The possibilities of applying the proposed approach are demonstrated in the example of calculating the locations of sound signal sources of the warning system for a model city area. The possibilities of taking into account the acoustic characteristics of buildings in the warning area and ensuring the parameters of the regulatory sound pressure level are shown. An algorithm for optimizing the use of the ranges of sound signal sources is presented.

ЗАСТОСУВАННЯ ДІАГРАМ ЛАГЕРРА – ВОРОНОГО ДЛЯ ПОБУДОВИ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ІНФРАСТРУКТУРИ СИСТЕМИ ЕКСТРЕНОГО ОПОВІЩЕННЯ НАСЕЛЕННЯ

Пасічник А. М.

*доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного моделювання та системного аналізу
Дніпровський державний технічний університет
Дніпробудівська вул., 2, Кам'янське, Дніпропетровська область, Україна
orcid.org/0000-0002-8561-1374
panukr977@gmail.com*

Ріпа М. Ю.

*аспірант кафедри математичного моделювання та системного аналізу
Дніпровський державний технічний університет
Дніпробудівська вул., 2, Кам'янське, Дніпропетровська область, Україна
orcid.org/0009-0006-0932-1945
ripami25@gmail.com*

Ключові слова: діаграма
Лагерра – Вороного, системи
екстреного оповіщення,
оптимізація розміщення
джерел, акустичні хвилі,
звуковий тиск.

Актуальність статті обумовлена потребою розробки й удосконалення методів оптимального розміщення джерел звукових сигналів систем екстреного оповіщення населення для забезпечення ефективності їх функціонування. Розробка нових підходів дасть змогу зменшити витрати на обслуговування та розміщення таких систем, покращити час їх розгортання та забезпечити для населення території оповіщення нормативний і більш комфортний рівень акустичного тиску звукових сигналів.

Метою дослідження є розробка алгоритму застосування діаграм Лагерра – Вороного для розміщення джерел звукових сигналів системи екстреного оповіщення населення з урахуванням акустичних та інших параметрів, що впливають на якість її роботи.

У статті наведено результати моделювання й алгоритм використання діаграм Лагерра – Вороного для оптимізації розміщення джерел звукових сигналів у системах екстреного оповіщення населення. Запропонована методика дає змогу моделювати та визначати зони покриття з урахуванням ефективної дальності дії джерел оповіщення, щільності забудови, особливостей рельєфу й акустичних характеристик місцевості. Розроблений алгоритм враховує особливості поширення звукових хвиль у середовищі з різними умовами поглинання акустичних хвиль з огляду на особливості забудови території та висоту розміщення джерел, які впливають на їх ефективну дальність.

Можливості застосування запропонованого підходу продемонстровано на прикладі розрахунку місць розміщення джерел звукових сигналів системи оповіщення для модельної території міста. Показано можливості урахування акустичних характеристик будівель території оповіщення та забезпечення параметрів нормативного рівня звукового тиску. Наведено алгоритм оптимізації використання радіусів дії джерел звукових сигналів.

Introduction. Today, the efficiency of emergency alert systems for the population largely depends on the effective placement of sound signal sources. High-quality coverage of a territory with alert signals requires consideration of its topographical features, building density, terrain influence, acoustic characteristics, and other parameters, making this a

complex task. Insufficient coverage leads to the risk of alert gaps, while excessive overlap may result in acoustic pressure exceeding regulatory levels. The propagation characteristics of sound waves are also crucial for effective system modeling. The intensity of a sound signal gradually decreases as the distance from the alert source increases due to factors such as

environmental absorption and the density of the area's development. This attenuation, caused by the unique features of the terrain, can significantly reduce the effective coverage radius. Additionally, the height at which the sources are placed affects their efficiency by mitigating the impact of terrain obstacles and buildings. An essential condition for the safe operation of alert systems is compliance with regulatory sound pressure levels within the frequency range of 63 Hz to 8000 Hz.

Therefore, the issue of further improving and developing methods for optimizing the placement of emergency alert sources remains highly relevant. This includes accounting for critical factors such as the sources' effective range, signal attenuation due to absorption, installation height, and compliance with acoustic parameters to regulatory standards.

Problem Statement. The aim of the study is to develop an algorithm for applying Laguerre–Voronoi diagrams to address the problem of rational placement of sound signal sources in emergency alert systems for the population, taking into account acoustic characteristics and additional parameters that may influence the system's performance quality. The use of Laguerre–Voronoi diagrams will enable the calculation of effective influence zones for each sound signal source, ensure uniform coverage of the alert area, and minimize acoustic discomfort in compliance with established norms. Furthermore, it will facilitate the optimization of the placement of sound signal sources in emergency alert systems.

Literature Review. The problem of optimizing the placement of sound sources with different signals to ensure effective coverage of an alert area belongs to the class of problems within the mathematical theory of optimal set partitioning (OSP) in n -dimensional Euclidean space.

The origins, dynamics, and prospects for further development and application of the OSP theory in n -dimensional Euclidean space are outlined in [1]. Examples of applying OSP theory to various theoretical optimization problems and solutions to the generalized location-allocation problem are provided.

A generalization of solutions for continuous OSP problems based on partition quality criteria, ensuring a specific type of Voronoi diagram, is presented in [2]. Mathematical and algorithmic tools for constructing both existing and new Voronoi diagrams are proposed.

By synthesizing OSP solution methods with neuro-fuzzy technologies and modifying Shor's r -algorithm for non-smooth optimization problems, a method for solving OSP problems with fuzzy parameters in constraints is proposed in [3]. The effectiveness of the approach is demonstrated through a model problem that partitions a set into three subsets with fuzzy constraint parameters.

The potential applications of OSP theory for continuous problems in n -dimensional Euclidean space to artificial intelligence tasks are explored in [4]. Pattern recognition problems under certainty and uncertainty are formulated, with special attention to fuzzy Voronoi diagrams. Examples of constructing fuzzy Voronoi diagrams with optimal generator point placement are included.

The formulation and numerical algorithm for solving a continuous linear OSP problem for multiplex partitioning of bounded two-dimensional sets – modeling optimal placement of service centers with overlapping service zones – are detailed in [5]. Specific cases are demonstrated: a fixed set of centers, optimization of their coordinates within a given set, and adding new centers with redistributing service zones in an updated network.

A methodology for applying OSP theory in n -dimensional Euclidean space to solve location-allocation problems, described through infinite-dimensional OSP models, is presented in [6].

The results of applying OSP models to optimize the placement of bank service units providing various services while partitioning client regions into service zones for customer flow optimization are detailed in [7]. This problem is characterized as a continuous nonlinear multi-product OSP problem with constraints on subset center coordinates. The analytical solution includes optimization parameters.

Study [8] proposes the use of generalized Voronoi diagrams based on Laguerre geometry for managing heterogeneous sensor networks. This approach adapts the OSP model for sensors with varying radii and directions of influence.

An algorithm for the optimal placement of sensor nodes in territories with various obstacles, based on modified Voronoi diagrams, is presented in [9]. This method accounts for noise and terrain variations.

The methodology for reducing the construction of optimal solutions for infinite-dimensional location-allocation problems to solving operator equations with parameters derived from an auxiliary finite-dimensional non-differentiable optimization problem is described in [10].

A review of cooperative control strategies for sensor networks to achieve complete territorial coverage, utilizing modified Voronoi diagram metrics, along with experimental results, is presented in [11].

The results of studying the acoustic properties of absorbing materials and the specifics of sound wave absorption in environments with various acoustic characteristics are discussed in [12].

Key algorithms for computing power diagrams of sets, features of working with Laguerre–Voronoi diagrams, and the challenges and opportunities of their practical use are outlined in [13].

Research Methods and Algorithms. To address the problem of rational placement of sound signal

sources for the emergency alert system, it is proposed to use the Laguerre–Voronoi diagram [8; 13]. The Laguerre–Voronoi diagram, also referred to as the ownership diagram, represents a generalization of the standard Voronoi diagram for partitioning a subset of points into a system of circles, enabling its use for complete coverage of a given area with circles of varying radii. Thus, in this case, the Laguerre–Voronoi diagram will represent a system of circles, each reflecting the area of sound signal propagation from an alert source located at the center of the circle, ensuring complete coverage of the alert territory while taking into account its specific features and the possibility of using sound sources of different power levels.

In this case, the construction of the ownership diagram depends on the coordinates of the locations of the sound signal sources and the corresponding area of the alert territory and is determined by the generalized ownership (distance) function [13]:

$$w(P, C_i) = r^2 - d^2, \quad (1)$$

where $w(P, C_i)$ – is the membership function of point P to the circle with center C_i ;

r – is the radius of circle C_i ; d – is the distance from point P to the center of circle C_i , $d^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$.

The values of function (1) allow determining the distribution zones of the territory among the alert sources according to the following criteria

$$P(x, y) C_i(x_i, y_i) \text{ npu } w(P, C_i) \geq 0, \quad (2)$$

$$P(x, y) C_i(x_i, y_i) \text{ npu } w(P, C_i) < 0, \quad (3)$$

Thus, applying the membership function (1) with criteria (2) and (3) allows partitioning the entire set of points in the territory into subsets of influence zones of the nearest alert sound sources with specified power, forming a system of convex polygons. Each polygon represents the coverage area of a specific source. The coverage area of an alert source is a subset of all points P , for which the membership function relative to circle C_i is greater than that for any other circle:

$$\text{Cell}(C_i) = \bigcap_{j \neq i} \{P | w(P, C_i) \geq w(P, C_j)\}, \quad (4)$$

where $\text{Cell}(C_i)$ – is the subset of points in the influence zone of source C_i ;

$\cap$ – intersection of sets of points that satisfy the condition of minimal distance.

The boundary of the influence zones of two alert sources is determined using the radical axis, which is the geometric locus of all points for which the membership function relative to the two circles has equal values:

$$\|P - C_i\|^2 - r_i^2 = \|P - C_j\|^2 - r_j^2 \quad (5)$$

where $\|P - C_i\|^2$ – is the squared distance between point P and center C_i ;

$\|P - C_j\|^2$ – is the squared distance between point P and center C_j ;

r_i^2, r_j^2 – are the squares of the radii of the respective circles.

According to the proposed algorithm for constructing the rational infrastructure of the emergency alert system using ownership diagrams, it is necessary to:

1) Define the parametric coefficients of acoustic wave propagation efficiency from the alert sound source locations, taking into account additional parameters such as the height of the sources and the density of urban development;

2) Calculate the coverage zones for the sound sources considering the parameters of the selected sound generation equipment models, their power, and the specific features of the coverage area;

3) Determine the required number of sound sources to fully cover the alert territory and the coordinates of their placement (x_i, y_i) ;

4) Partition the set of points in the alert territory into coverage zone subsets using formula (1) and construct radical axes of the ownership diagram for each pair of sources using formula (5).

The specific features of the alert territory, elevation changes, and other important parameters are considered through modifications of the radii r_i and corresponding parametric coefficients.

The Laguerre–Voronoi diagram constructed in this way determines the coverage zones for each alert sound source, which are bounded by radical axes. The influence zones of each source and the radical axes are projected onto the plane in the form of corresponding circles and straight lines, as shown in Fig. 1.

Additionally, calculating specific coverage zones for alert sources requires consideration of their acoustic characteristics, such as sound pressure, distance, the speed of acoustic wave propagation, signal absorption by the environment, and its impact on signal range, building density, and the height of source placement. For example, the intensity of a sound signal decreases proportionally to the square of the distance from the generation source and is calculated as follows:

$$p(x, y) = \frac{p_0}{4[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]}, \quad (6)$$

where $p(x, y)$ – is the intensity of acoustic pressure at point (x, y) in the influence zone of source $C_i(x_i, y_i)$; p_0 – is the intensity of acoustic pressure at the source of generation.

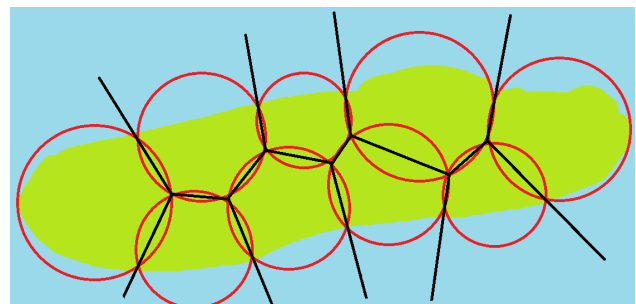


Fig. 1. Example of an ownership diagram with the placement of 9 sources

In some cases, the radius of influence of alert sources allows accounting for sound signal attenuation. However, for more accurate consideration of real conditions, it is advisable to include the effect of acoustic absorption by objects in the alert territory using the following formula (5):

$$p_{eff}(d) = p(d)e^{-d}, \quad (7)$$

where $p_{eff}(d)$ – is the effective sound pressure at distance d ;

α – is the absorption coefficient of the environment.

By using the exponential attenuation formula (7), it is possible to pre-calculate the influence of atmospheric density, and the features and materials of buildings in the alert territory.

Another important parameter influencing the radius of alert source operation is the height of their placement. The higher the alert source is positioned, the better and larger its effective range, as the influence of terrain obstacles and buildings decreases. This effective radius can be calculated as follows:

$$r_{eff} = r_0 + h * k, \quad (8)$$

where r_0 – is the base radius of the alert source, m ;

h – is the height of source placement, m ;

k – is the coefficient of height influence on the radius.

Another critical parameter is the permissible level of acoustic pressure, ensuring a balance between alert efficiency and the safety of sound signal levels for the population. Relevant normative parameters for permissible sound pressure levels for humans at various frequencies are presented in Table 1.

Using these values ensures the necessary sensitivity of the population to the functioning of the alert system while minimizing its impact on their health.

After considering all parameters and constraints, it is possible to optimize the placement of the alert points. This requires calculating and evaluating the proper signal level in the source's influence zone:

$$p_{eff}(x, y) \geq p_{min}, \quad (9)$$

where p_{min} – is the minimum sound pressure sufficient for human perception;

where p_{min} – is the minimum sound pressure sufficient for human perception;

p_{min} is considered sufficient at the level $p_{min} \geq 50$ dB;

$p_{eff}(x, y)$ – is the effective sound pressure at the point (x, y) in the alert zone;

dA – is the elementary area.

The verification of ensuring the proper signal level within the coverage area of each source is carried out using formula (9). If the result for the points of placement of the radical axes is significantly greater than

p_{min} , the system can be optimized by reducing the power of the warning source, its placement height, or another parameter that would allow reducing the resulting influence of two sources and optimizing energy costs.

Analysis of the results. The application of the proposed approach will be illustrated by the example of determining the locations of sound signal sources for a warning system in a small town or a district of a city, which is approximated by a rectangle of 30 by 20 kilometers. The coordinates of its points will be: (0, 0), (30000, 0), (0, 20000), (30000, 20000). This rectangle has three types of buildings, each with its own environmental absorption coefficient: central zone $\alpha = 0.15$, peripheral zone $\alpha = 0.1$, and industrial zone $\alpha = 0.05$.

For the warning sources, the initial sound pressure level is $p_0 = 100$ dB. Accordingly, the minimum and maximum values are: $p_{min} = 50$ dB; $p_{max} = 110$ dB.

The number of sources to be placed – 6.

The radius of action of the sources without considering height is: $r_0 = 6800$ m.

The height influence coefficient on the radius of the source's action is: $k = 0.5$.

The rectangle is divided into 6 zones, approximated to squares, with one source placed at the center of each zone. After placing the sources, they will have a certain height depending on the area or location. In the zero approximation, it is assumed that each source has a placement height of 50 m.

The city's area is roughly divided into three density zones, and therefore each source will have a different absorption coefficient α . The placement coordinates of the sources in the zero approximation are as follows:

Source 1: (5000, 5000), peripheral zone: $\alpha = 0.05$.

Source 2: (15000, 5000), industrial zone: $\alpha = 0.1$.

Source 3: (25000, 5000), central zone: $\alpha = 0.15$.

Source 5: (5000, 15000), peripheral zone: $\alpha = 0.05$.

Source 6: (15000, 15000), industrial zone: $\alpha = 0.1$.

Source 7: (25000, 15000), central zone: $\alpha = 0.15$.

For each placement variant, the coverage radius is determined considering the building density and the source height using formula (8):

$$r_{eff1} = 6800 * (1 - 0.05) * (1 + 0.5 * 0.5) = 8060 \text{ m},$$

$$r_{eff2} = 6800 * (1 - 0.5) * (1 + 0.5 * 0.5) = 7650 \text{ m},$$

$$r_{eff3} = 6800 * (1 - 0.15) * (1 + 0.5 * 0.5) = 7220 \text{ m},$$

$$r_{eff4} = 6800 * (1 - 0.05) * (1 + 0.5 * 0.5) = 8060 \text{ m},$$

$$r_{eff5} = 6800 * (1 - 0.5) * (1 + 0.5 * 0.5) = 7650 \text{ m},$$

$$r_{eff6} = 6800 * (1 - 0.15) * (1 + 0.5 * 0.5) = 7220 \text{ m},$$

Now, for each source, the influence zone is calculated. For each point of the warning territory, the membership function value (1) is calculated, and based on the results, it is assigned to the coverage

Table 1

Normative parameters of sound pressure for various frequency values

Vibration parameters	Numerical values of sound vibration parameters							
Average frequencies of octave bands, Hz	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
Limit sound pressure level, dB	110	94	87	81	78	75	73	71

zone of the source for which $w(P, C_i)$ is minimal. This step might require many calculations, so the territory area is divided into a grid with a step of 1000 m. The calculations are performed only for the central point, thus the entire cell is included in the influence zone. The algorithm's accuracy depends on the grid step size. The smaller the step, the higher the accuracy.

To determine the boundaries of the coverage zones of each source, the coordinates of the radical axes are calculated using formula (2). These will be straight lines passing through points that have the same power relative to the two notification sources. As a result, zones of influence are formed, limited by the radical axes. For example, for sources 1 and 2, the radical axis will be vertical, $x = 10000$, since $y_1 = y_2$.

For the formed coverage zones, a check is performed to ensure complete partitioning of the warning territory between the sources. The distance between two sources must be less than the sum of their radii. For example, for sources 1 and 2, $d_{12} = 10000$ m, which is less than $r_{\text{eff}1} + r_{\text{eff}2} = 8060 + 7650 = 15710$ m.

Next, optimization of the radii is performed:

1) If the distance between two sources is less than the sum of their action radii, optimization is considered by reducing the action radius of the warning sources, considering constraints.

2) If the distance between two sources is greater than the sum of their radii, optimization is carried out by increasing the placement height of the warning source or its power within the norm.

3) If the distance is too large, the possibility of placing an additional warning source and forming new coverage zones is considered.

In this case, most sources had excessive overlap, so optimization was performed by reducing the placement height of all sources, and new radii were calculated, as shown in Table 2.

A check was also carried out for the obtained variant of placing sound signal sources to ensure the required sound pressure level according to criterion (9).

For example, for Source 1, the sound pressure values at points in the coverage zone:

Point (0, 0), distance from source to point $d = 7071$:
 $p_{\text{eff}}(700, 500) = 100 * e^{-0.3*7071/7100} \approx 74.1$ dB, which is within the norm.

Point (9000, 9000), distance from source to point $d = 5657$:

$p_{\text{eff}}(9000, 9000) = 100 * e^{-0.3*5657/7100} \approx 78.7$ dB, which is within the norm.

The resulting variant of placement of sound signal sources and distribution of corresponding notification zones is shown in Fig. 2.

Thus, checking the sound pressure magnitude at the boundaries of the sound signal source's action zone and other important points of the warning territory ensures compliance with the criterion of the sound signals meeting the set normative values, that is, $p_{\text{min}} \leq p_{\text{eff}}(x, y) < p_{\text{max}}$.

Conclusions. The results of the study allow us to conclude the effectiveness of using Laguerre-Voronoi diagrams for the optimal placement of sound signal sources in an emergency population warning system. The proposed algorithm for calculating coverage zones takes into account the action radii of warning sources, terrain features, and equipment acoustic characteristics to build the appropriate infrastructure for quality territorial coverage with the minimum number of sources and maximum coverage. The use of coverage zone methods, along with radical axes for forming convex polygon grids, ensures clear visualization and calculation accuracy. The use of acoustic characteristics provides the necessary data for analyzing compliance with the established sound pressure norms to ensure the quality of life of the population. The proposed approach can be used to improve emergency warning systems, enhance their reliability, and optimize installation costs as well as operational expenses for ensuring their functioning.

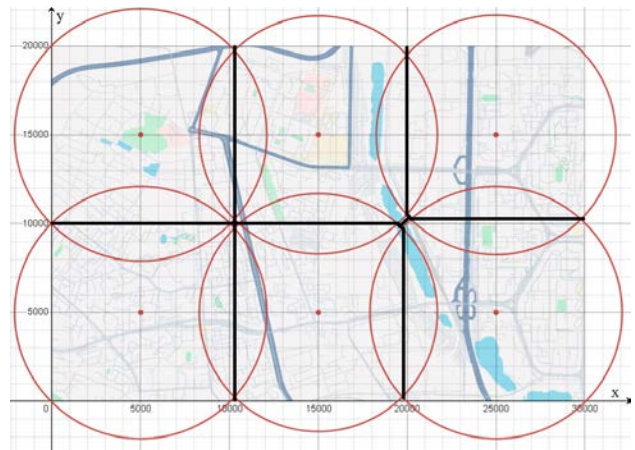


Fig. 2. Laguerre-Voronoi diagram of sound signal source placement and corresponding warning zones

Table 2

Results of optimizing the effective warning radii

Source	Coordinates	Radius before optimization	Radius after optimization	Absorption coefficient
1	(5000, 5000)	8060	7100	0.05
2	(15000, 5000)	7650	6700	0.1
3	(25000, 5000)	7220	7100	0.15
4	(5000, 15000)	8060	7100	0.05
5	(15000, 15000)	7650	6700	0.1
6	(25000, 15000)	7220	7100	0.15

The obtained results align well with prior studies on Voronoi-based optimizations [1–7], showcasing improved adaptability to heterogeneous urban settings. Compared to traditional grid-based placements, Laguerre-Voronoi diagrams demonstrate superior accuracy and efficiency in accounting for environmental variables such as terrain features and urban density.

Future research should explore:

1. Integration of dynamic environmental factors, like seasonal variations in acoustic absorption.

2. Scalability of the algorithm to large metropolitan areas with diverse building architectures.

The scientific novelty lies in applying Laguerre-Voronoi diagrams to optimize emergency alert systems by balancing effective coverage, regulatory compliance, and system costs. The proposed approaches have significant potential for further development and application in improving the infrastructure for placing sound signal sources in public safety systems.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kiseleva E.M. The Emergence and Formation of the Theory of Optimal Set Partitioning for Sets of the n-Dimensional Euclidean Space. Theory and Application. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50 (9). P. 1–24. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.10.
2. Kiseleva E., Koriashkina L. Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. I. Theoretical Foundations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51 (3). P. 325–335. DOI: 10.1007/s10559-015-9725-x.
3. Притоманова О. М. Розв'язання задачі оптимального розбиття множин із нечіткими параметрами в обмеженнях. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інф.* 2019. № 27. С. 97–107. DOI: 10.30970/vam.2019.27.10444.
4. Кісельова О. М., Притоманова О. М., Гарт Л. Л. Застосування теорії оптимального розбиття множин до розв'язання задач штучного інтелекту та розпізнавання образів. *Системні дослід. та інформ. технології: міжн. наук.-техн. журнал*. 2021. № 4. С. 91–101. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2021.4.07.
5. Koryashkina L.S., Alhorytmy terytorialnoyi sehmentatsiyi dlya merezhi servisnykh tsentriv iz perekryttyam zon obsluhovuvannya. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*. 2023. № 2. P. 12–25. DOI: 10.32782/IT/2023-2-2.
6. Кісельова О. М., Притоманова О. М., Журавель С. В., Шаравара В. В. Розв'язання однієї нескінченновимірної задачі location-allocation із нескінченими параметрами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро : Ліра. 2018. С. 99–109. DOI: 10.15421/321810.
7. Строева В. О., Кісельова О. М., Строева Г. В., Косенко А. Р. Математичне моделювання задачі розміщення підрозділів банку з метою оптимізації клієнтопотоку. *Математичне моделювання*. № 1 (43). ДДТУ: Кам'янське, 2020. С. 101–108. URL: <http://matmod.dstu.dp.ua/issue/view/12566>.
8. Bartolini N., Calamoneri T., La Porta T.F., & Silvestri S. Autonomous Deployment of Heterogeneous Mobile Sensors. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2011. Vol. 10 (6). P. 753–766. DOI: 10.1109/TMC.2010.192.
9. Eledlebi K., Ruta D., Hildmann H., Saffre F., Al Hammadi Y., & Isakovic A.F. Coverage and Energy Analysis of Mobile Sensor Nodes in Obstructed Noisy Indoor Environment: A Voronoi-Approach." *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2022. Vol. 21 (8). P. 2745–2760. DOI: 10.1109/TMC.2020.3046184.
10. Murat A. A Continuous Analysis Framework for the Solution of Location-Allocation Problems with Dense Demand / A. Murat, V. Verter, G. Laporte. *Les Cahiers du GERAD*. 2008. 25 p.
11. Stergiopoulos Y., & Tzes A. Cooperative positioning/orientation control of mobile heterogeneous anisotropic sensor networks for area coverage. In *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Hong Kong, China, 2014. P. 1106–1111. DOI: 10.1109/ICRA.2014.6906992.
12. Piana E.A., Bonfiglio P., & Rychtarikova M. Acoustic Properties of Absorbing Materials. *Applied Sciences*, 2022. Vol. 12 (9). P. 4446. DOI: 10.3390/app12094446.
13. Aurenhammer, F Power Diagrams: Properties, Algorithms, and Applications. *SIAM Journal on Computing*, 1987. Vol. 16 (1). P. 78–96. DOI: 10.1137/S0097539790043016.

REFERENCES

1. Kiseleva, E.M. (2018). The Emergence and Formation of the Theory of Optimal Set Partitioning for Sets of the n-Dimensional Euclidean Space. Theory and Application. *Journal of Automation and Information Sciences*, 50 (9), 1–24. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.10.
2. Kiseleva, E., Koriashkina, L. (2015). Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. I. Theoretical Foundations. *Cybernetics and Systems Analysis*, 51 (3), 325–335. DOI: 10.1007/s10559-015-9725-x.

3. Prytomanova, O.M. (2019). Rozvyazannya zadachi optymalnoho rozbyttya mnozhyn iz nechitkymy parametramy v obmezhenyakh. *Visn. Lviv. un-tu. Ser. Prykl. matem. ta inf.*, 27, 97–107. DOI: 10.30970/vam.2019.27.10444.
4. Kiselova O.M., Prytomanova O.M., Hart L.L. (2021). Zastosuvannya teoriiy optymalnoho rozbyttya mnozhyn do rozvyazannya zadach shtuchnoho intelektu ta rozpiznavannya obraziv. *Systemni doslidzheniya ta informatsiyni tekhnolohiyi*, 4, 91–101. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2021.4.07.
5. Koryashkina, L.S. (2023). Alhorytmy terytorialnoyi sehmentatsiyi dlya merezhi servisnykh tsentriv iz perekryttyam zon obsluhovuvannya. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 2, 12–25. DOI: 10.32782/IT/2023-2-2.
6. Kyselova, O.M., Prytomanova, O.M., Zhuravel, S.V., Sharavara, V.V. (2018). Rozvyazannya odnyeyi neskinchenovymirnoyi zadachi location-allocation iz nechitkymy parametramy. *Pytannya prykl. matem. i matem. modelyuvannya*. Dnipro: Lira. P. 99–109. DOI: 10.15421/321810.
7. Stroyeva, V.O., Kiselova, O.M., Stroyeva, H.V., Kosenko, A.R. (2020). Matematychnye modelyuvannya zadachi rozmishchennya pidrozdiliv banku z metoyu optymizatsiyi kliyentopotoku. *Matematychnye modelyuvannya*, 1 (43). DDTU: Kamyanske. P. 101–108. URL: <http://matmod.dstu.dp.ua/issue/view/12566>.
8. Bartolini, N., Calamoneri, T., La Porta, T. F., & Silvestri, S. (2011). Autonomous Deployment of Heterogeneous Mobile Sensors. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 10 (6), 753–766. DOI: 10.1109/TMC.2010.192.
9. Eledlebi, K., Ruta, D., Hildmann, H., Saffre, F., Al Hammadi, Y., & Isakovic, A.F. (2022). Coverage and Energy Analysis of Mobile Sensor Nodes in Obstructed Noisy Indoor Environment: A Voronoi-Approach. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 21 (8), 2745–2760. DOI: 10.1109/TMC.2020.3046184.
10. Murat, A., Verter, V., Laporte, G. (2008). A Continuous Analysis Framework for the Solution of Location-Allocation Problems with Dense Demand. *Les Cahiers du GERAD*. 25 p.
11. Stergiopoulos, Y., & Tzes, A. (2014). Cooperative positioning/orientation control of mobile heterogeneous anisotropic sensor networks for area coverage. In 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Hong Kong, China, 1106–1111. DOI: 10.1109/ICRA.2014.6906992.
12. Piana, E.A., Bonfiglio, P., & Rychtarikova, M. (2022). Acoustic Properties of Absorbing Materials. *Applied Sciences*, 12 (9), 4446. DOI: 10.3390/app12094446.
13. Aurenhammer, F. (1987). Power Diagrams: Properties, Algorithms, and Applications. *SIAM Journal on Computing*, 16 (1), 78–96. DOI: 10.1137/S0097539790043016.

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-05>

ЗАДАЧА ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРИШАРОВИХ СУЦІЛЬНИХ ЦИЛІНДРІВ ІЗ НЕПЕРЕРВНО-НЕОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ЗА РІЗНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ТОРЦЯХ

Рожок Л. С.

*доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри теоретичної та прикладної механіки
Національний транспортний університет
вул. Омеляновича-Павленка, 1, Київ, Україна
orcid.org/0000-0002-7926-9074
teor_mex@ukr.net*

Крук Л. А.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки
Національний транспортний університет
вул. Омеляновича-Павленка, 1, Київ, Україна
orcid.org/0000-0002-8131-564X
krukles@ukr.net*

Ісаєнко Г. Л.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
заступник завідувача кафедри математики та фізики
Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації ім. Героїв Крут
вул. Князів Острозьких, 45/1, Київ, Україна
orcid.org/0000-0003-0479-9596
gl_isayenko@ukr.net*

Ключові слова:

*вісесиметрична задача,
модуль пружності,
неперервно-неоднорідний
матеріал, сплайн-
апроксимація, шаруваті
циліндри.*

У статті розглядається вісесиметрична задача лінійної теорії пружності про напружений стан тришарових суцільних циліндрів із неперервно-неоднорідним заповнювачем, що перебувають під дією рівномірного нормального навантаження бічної поверхні за двох способів закріплення торців: шарнірного опирання та жорсткого закріплення. Задачу розв'язано на основі чисельно-аналітичного підходу, що базується на використанні методу сплайн-апроксимації розв'язку в напрямку поздовжньої координати, унаслідок чого вихідна двовимірна крайова задача для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних зводиться до одновимірної крайової задачі, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок якої знаходиться стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. При цьому розкривається невизначеність деяких множників розв'язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь у геометрично особливій точці ($r = 0$). Розглядаються тришарові циліндри з ізотропними несучими шарами, що мають різні механічні характеристики, для матеріалу заповнювача вибрано неперервно-неоднорідний за радіальною координатою матеріал, модуль пружності якого змінюється за квадратичним та лінійним законами, а коефіцієнт Пуассона дорівнює середньому арифметичному відповідних коефіцієнтів суміжних шарів. Шари з'єднані між собою без проковзування і відриву, при цьому на границях шарів заповнювач має

модуль пружності, що дорівнює модулю пружності суміжного шару. Достовірність і точність результатів забезпечується порівнянням розв'язку, отриманого на основі методу сплайн-апроксимації з точним розв'язком задачі у випадку шарнірного закріплення торців і варіацією кількості сплайн-функцій. Отримано розв'язки у вигляді графіків розподілу полів колових і поздовжніх напружень вздовж радіальної координати циліндра. Встановлено залежності характеристик напруженого стану розглядуваних циліндрів від закону зміни модуля пружності заповнювача, товщини середнього шару та способу закріплення торців.

STRESS STATE PROBLEM OF THREE-LAYERED SOLID CYLINDERS WITH CONTINUOUSLY NONHOMOGENEOUS FILLER UNDER DIFFERENT END BOUNDARY CONDITIONS

Rozhok L. S.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor at the Department of Theoretical and Applied Mechanics
National Transport University
Omelianovycha-Pavlenka str., 1, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-7926-9074
teor_mex@ukr.net*

Kruk L. A.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Theoretical and Applied Mechanics
National Transport University
Omelianovycha-Pavlenka str., 1, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-8131-564X
krukles@ukr.net*

Isaienko H. L.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Deputy Head of the Department of Mathematics and Physics
Heroes of Kruty Military Institute of Telecommunications and Information Technologies
Knyaziv Ostrozkykh str., 45/1, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0003-0479-9596
gl_isayenko@ukr.net*

Key words: *axisymmetric problem, elastic modulus, continuously nonhomogeneous material, spline approximation, layered cylinders.*

The article examines the axisymmetric problem of the linear theory of elasticity concerning the stress state of three-layered solid cylinders with a continuously nonhomogeneous filler subjected to uniform normal loading on the lateral surface under two types of end constraints: simply supported and rigidly clamped. The problem is considered for two types of end constraints: simply supported and rigidly clamped. The solution is obtained using a numerical-analytical approach based on spline approximation of the solution along the longitudinal coordinate. This approach reduces the original two-dimensional boundary value problem for a system of partial differential equations to a one-dimensional boundary value problem described by a system of ordinary differential equations, which is solved using a stable numerical method of discrete orthogonalization. Additionally, the method addresses the indeterminacy of certain factors in the system of ordinary differential equations at the geometrically singular point ($r = 0$).

The study considers three-layered cylinders with isotropic load-bearing layers that have different mechanical properties. The filler material is assumed to be continuously nonhomogeneous along the radial coordinate, with its elastic

modulus varying according to quadratic and linear laws. The Poisson's ratio of the filler is taken as the arithmetic mean of the corresponding Poisson's ratios of the adjacent layers. The layers are assumed to be perfectly bonded without slipping or separation, and at the interfaces, the filler's elastic modulus matches that of the adjacent layer. The accuracy and reliability of the results are verified by comparing the spline-approximation-based solution with the exact solution for the case of simply supported ends and by varying the number of spline functions. The obtained solutions are presented in the form of graphical distributions of circumferential and longitudinal stress fields along the cylinder radial coordinate. The study establishes the dependencies of the stress state characteristics on the variation of the filler's elastic modulus, the thickness of the middle layer, and the type of end constraints.

Вступ. Виготовленню нового конструктивного елемента передую створення відповідної математичної моделі для проведення необхідних чисельних експериментів із метою знаходження для нього оптимальних геометричних і механічних параметрів. Одним із різновидів математичних моделей є порожнисті та суцільні циліндри, які дають змогу перевірити можливу поведінку новостворених матеріалів у різноманітних умовах експлуатації. При цьому важливу роль відіграють вибрані для проведення таких експериментів методи та підходи.

У роботі [1] побудовано розв'язок квазістатичної задачі термпружності для довгого багат шарового порожнистого циліндра у вигляді суперпозиції залежностей, кожна з яких описує напружений стан, зумовлений відповідним тепловим або силовим чинником, та проілюстровано його застосування до визначення термонапруженого стану для різних законів зміни температур довкілля та теплових потоків.

Метод скінчених елементів, що охоплює метод колокації із септичними В-сплайнами як базисними функціями для розв'язання крайових задач, застосовується в роботі [2].

Поведінка циліндричних оболонок за дії різноманітного навантаження, зокрема дії зовнішнього тиску та внутрішнього тиску, наявності масових сил та ін., розглядається в роботі [3]. При цьому досліджується вплив геометричних параметрів розглядуваних оболонок на їх напружено-деформований стан із метою оптимізації цих параметрів під час вибору відповідної форми подібних конструктивних елементів.

Моделюванню напружено-деформованого стану конструкцій, виготовлених із композитних матеріалів, присвячено статті [4, 5]. Механічна поведінка волокнистого композита на основі методу представницького об'ємного елемента розглянута в роботі [4]; на основі модифікованого методу скінчених елементів, а саме моментної схеми скінченого елемента, у роботі [5] досліджується поведінка конструкцій із композиційних матеріалів, що мають дискретні включення.

Вплив пружної неоднорідності на напружений стан суцільного циліндра за умови залежності модуля зсуву від радіальної координати досліджено в роботі [6] з метою надання необхідних

інженерних рекомендацій щодо експлуатації матеріалів, які мають відповідні механічні характеристики.

Розв'язки плоскої вісесиметричної задачі теорії пружності для суцільного кругового циліндра, складеного з концентричних неперервно-неоднорідних за радіальною координатою шарів, за умови їх ідеального контакту за дії рівномірного тиску бічної поверхні, на основі методу безпосереднього інтегрування побудовано в [7].

Плоска вісесиметрична задача лінійної теорії пружності для ізотропного суцільного циліндра за дії рівномірно-розподіленого нормального навантаження за різних способів закріплення торців розв'язується в роботі [8]. Ця робота є продовженням досліджень, пов'язаних із визначенням напруженого стану суцільних циліндрів із використанням методу сплайн-апроксимації функцій та чисельного методу дискретної ортогоналізації, що дає змогу у випадку шаруватих циліндрів отримати для кожного його шару рівняння однакової структури. Сплайн-апроксимація розв'язку дає змогу врахувати різні граничні умови на торцях циліндра, а чисельне інтегрування диференціальних рівнянь уздовж радіальної координати – точно враховувати змінні за цією координатою механічні властивості матеріалів шарів досліджуваних циліндрів. Запропонований у роботі підхід дає можливість одночасно досліджувати вплив на напружений стан шаруватих циліндрів їх геометричних параметрів, механічних характеристик матеріалу, а також спосіб закріплення торців.

Метою дослідження є визначення впливу механічних параметрів заповнювача, товщини середнього шару та способу закріплення торців на характеристики напруженого стану тришарових суцільних циліндрів.

Постановка задачі та метод розв'язування. У циліндричній системі координат r, θ, z (r – полярний радіус, θ – центральний кут у поперечному перерізі, z – поздовжня координата) розглядаються пружні тіла у вигляді тришарових суцільних циліндрів ($0 \leq r_1 \leq r \leq r_2 \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq l$; R – радіус циліндра, l – його довжина), що перебувають під дією рівномірно-розподіленого нормального навантаження ($q_r = q_0 \sin(\pi z / l), q_0 = \text{const}$). При цьому виконуються співвідношення

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta; z = z. \quad (1)$$

Коефіцієнти Ламе в цій системі координат мають вигляд

$$H_1 = 1; H_2 = r; H_3 = 1. \quad (2)$$

Циліндри складені із шарів, що взаємодіють між собою без проковзування та відриву. Нехай у загальному випадку для кожного шару коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга змінюються за радіальною координатою, тобто $E^i = E^i(r)$, $\nu_i = \nu_i(r)$ ($i = 1, 2, 3$).

За вихідні беруться рівняння лінійної теорії пружності для вісесиметричного тіла в циліндричній системі координат, які з урахуванням (1) та (2) для кожного шару мають такий вигляд: співвідношення Коші

$$\varepsilon_r^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}, \varepsilon_\theta^i = \frac{u_r^i}{r}, \varepsilon_z^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}, \varepsilon_{rz}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; \quad (3)$$

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r^i}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} + \frac{\sigma_r^i - \sigma_\theta^i}{r} = 0, \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}^i}{r} = 0; \quad (4)$$

співвідношення узагальненого закону Гука для ізотропного тіла

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^i &= \frac{1}{E^i} [\sigma_r^i - \nu_i(\sigma_\theta^i + \sigma_z^i)], \varepsilon_\theta^i = \frac{1}{E^i} [\sigma_\theta^i - \nu_i(\sigma_r^i + \sigma_z^i)], \\ \varepsilon_z^i &= \frac{1}{E^i} [\sigma_z^i - \nu_i(\sigma_r^i + \sigma_\theta^i)], \varepsilon_{rz}^i = \frac{2(1 + \nu_i)}{E^i} \tau_{rz}^i \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (5)$$

де u_r^i, u_z^i – переміщення в радіальному та поздовжньому напрямку в i -му шарі; $\varepsilon_r^i, \varepsilon_\theta^i, \varepsilon_z^i, \varepsilon_{rz}^i$ – деформації, що виникають в i -му шарі; $\sigma_r^i, \sigma_\theta^i, \sigma_z^i, \tau_{rz}^i$ – напруження у відповідних напрямках в i -му шарі. Додаючи до рівнянь (3) – (5) навантаження на бічній поверхні $r = R$ та граничні умови на торцях $z = 0; l$, дійдемо до двовимірної крайової задачі. При цьому мають виконуватись умови спряження шарів

$$u_r^i = u_r^{i+1}, u_z^i = u_z^{i+1}; \sigma_r^i = \sigma_r^{i+1}, \tau_{rz}^i = \tau_{rz}^{i+1} \quad (i = 1, 2).$$

На торцях циліндра розглядатимемо два види граничних умов:

а) шарнірного опирання

$$\sigma_z^i = 0, u_r^i = 0, \text{ якщо } z = 0; l, \quad (6)$$

які з урахуванням другої умови (6) мають вигляд

$$u_r^i = 0, \partial u_z^i / \partial z = 0, \text{ якщо } z = 0; l; \quad (7)$$

б) жорсткого закріплення

$$u_r^i = 0, u_z^i = 0, \text{ якщо } z = 0; l. \quad (8)$$

Граничні умови на бічній поверхні $r = R$ через прикладене навантаження мають вигляд

$$\sigma_r^R = q_r, \tau_{rz}^R = 0, \text{ якщо } r = R. \quad (9)$$

Виходячи із фізичних міркувань, додамо граничні умови на осі циліндра

$$\tau_{rz}^0 = 0, u_r^0 = 0, \text{ якщо } r = 0. \quad (10)$$

Вибравши за розв'язувальні функції компоненти переміщення u_r^i, u_z^i , після відповідних перетворень отримаємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних для кожного шару ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial r^2} &= -\frac{a_1^i}{a_1^i} \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial z^2} - \frac{a_2^i + a_3^i}{a_1^i} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial r} + \frac{u_r^i}{r^2} - \frac{1}{a_1^i} \frac{\partial a_1^i}{\partial r} \frac{\partial u_r^i}{\partial r} - \frac{1}{a_1^i} \frac{\partial a_2^i}{\partial r} \frac{u_r^i}{r} - \frac{1}{a_1^i} \frac{\partial a_3^i}{\partial r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial r^2} &= -\frac{a_1^i + a_2^i}{a_3^i} \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial r \partial z} - \frac{a_2^i + a_3^i}{a_3^i} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - \frac{a_1^i}{a_3^i} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial r} - \frac{1}{a_3^i} \frac{\partial a_3^i}{\partial r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - \frac{1}{a_3^i} \frac{\partial a_1^i}{\partial r} \frac{\partial u_z^i}{\partial r}, \\ a_1^i &= \frac{E^i(1 - \nu_i)}{1 - \nu_i - 2\nu_i^2}, \quad a_2^i = \frac{E^i \nu_i}{1 - \nu_i - 2\nu_i^2}, \quad a_3^i = \frac{E^i}{2(1 + \nu_i)} \quad (0 \leq r \leq R; 0 \leq z \leq l). \end{aligned} \quad (11)$$

Граничні умови (9), (10) у переміщеннях матимуть вигляд

$$u_r^0 = 0, \frac{\partial u_z^0}{\partial r} = 0, \text{ якщо } r = 0, \quad (12)$$

$$a_1^R \frac{\partial u_r^R}{\partial r} + a_2^R \frac{u_r^R}{r} + a_3^R \frac{\partial u_z^R}{\partial z} = q_r, \frac{\partial u_r^R}{\partial z} + \frac{\partial u_z^R}{\partial r} = 0,$$

якщо $r = R$.

Для зниження розмірності системи диференціальних рівнянь у частинних похідних застосовується підхід, що базується на сплайн-апроксимації розв'язку у напрямку твірної. Для цього подамо розв'язок системи диференціальних рівнянь у частинних похідних (11) у вигляді сплайн-функцій (індекс i в позначеннях номера шарів надалі опустимо)

$$u_r(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{1i}(r) \varphi_{1i}(z), \quad u_z(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(r) \varphi_{2i}(z), \quad (13)$$

де $u_{1i}(r), u_{2i}(r)$ – шукані функції, а $\varphi_{1i}(z), \varphi_{2i}(z)$ – функції, що побудовано за допомогою лінійних комбінацій В-сплайнів третього степеня [8], які дають змогу точно задовольнити граничні умови та торцях циліндра (7), (8).

Після підстановки виразів (13) до системи диференціальних рівнянь (11) потрібно задовольнити їх у точках колокації $z = z_k$ ($k = \overline{0, N}$). При цьому отримуємо систему $2(N + 1)$ звичайних диференціальних рівнянь. Аналогічно чинять із граничними умовами (12) на поверхнях $r = 0; R$.

Таким чином, розв'язувальна система звичайних диференціальних рівнянь зі змінними вздовж координати r коефіцієнтами набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{1i}}{dr^2} \varphi_{1i}(z_k) &= -\frac{a_2}{a_1} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}'(z_k) - \frac{a_2 + a_3}{a_1} \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{r} \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) + \\ &+ \sum_{i=0}^N \frac{1}{r^2} u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dr} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{1}{a_1} \frac{da_2}{dr} \sum_{i=0}^N \frac{u_{1i}}{r} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{1}{a_1} \frac{da_3}{dr} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi_{2i}'(z_k), \\ \sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{2i}}{dr^2} \varphi_{2i}(z_k) &= -\frac{a_2 + a_3}{a_3} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}'(z_k) - \frac{a_2 + a_3}{a_3} \frac{1}{r} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{a_1}{a_3} \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) - \\ &- \frac{1}{r} \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) - \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dr} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}'(z_k) - \frac{1}{a_3} \frac{da_1}{dr} \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) \quad (k = \overline{0, N+1}); \end{aligned} \quad (14)$$

з граничними умовами

$$\sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) = 0, \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) = 0, \text{ якщо } r = 0,$$

$$\begin{aligned} a_1 \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) + a_2 \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) + a_3 \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) &= q_r, \\ \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) + \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) &= 0 \end{aligned} \quad \text{якщо } r = R. \quad (15)$$

Отримана система звичайних диференціальних рівнянь (14) має коефіцієнти при деяких членах, які за $r = 0$ утворюють невизначеність $0/0$, для розкриття якої скористаємося граничними переходами, тобто якщо $r \rightarrow 0$, то $u_{1i}/r \rightarrow du_{1i}/dr$ ($i = \overline{0, N}$). Тоді рівняння (14) в точці $r = 0$ набудуть вигляду

$$\sum_{i=1}^N \frac{d^2 u_{1i}}{dr^2} \varphi_{1i}(z_k) = -\frac{2}{a_1} \frac{da_1}{dr} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{1}{a_1} \frac{da_2}{dr} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi'_{2i}(z_k),$$

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{2i}}{dr^2} \varphi_{2i}(z_k) = -\frac{a_1}{2a_3} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi''_{2i}(z_k) - \frac{a_2 + a_3}{a_3} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi'_{1i}(z_k). \quad (16)$$

Додаючи до систем рівнянь (14), (16) граничні умови (15), доходимо до крайової задачі, яку можна розв'язати чисельно. При цьому для $r = 0$, використовується система рівнянь (16), а для усіх інших значень r – система рівнянь (14).

Введемо позначення

$$y_{1i} = u_{1i}, y_{2i} = \frac{du_{2i}}{dr}, y_{3i} = u_{2i}, y_{4i} = \frac{du_{1i}}{dr} \quad (i = \overline{0, N}).$$

Тоді розв'язувальну систему диференціальних рівнянь (14), (16) можна подати у векторному вигляді

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = A(r)\bar{Y} + \bar{f}, \quad (0 \leq r \leq R), \quad (17)$$

тут $\bar{Y} = \{y_{10}, \dots, y_{1N}; y_{20}, \dots, y_{2N}; y_{30}, \dots, y_{3N}; y_{40}, \dots, y_{4N}\}^T$; $A(r)$ – квадратна матриця порядку $4(N+1) \times 4(N+1)$, $\bar{f}$ – вектор правої частини. Граничні умови можна записати аналогічно

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{b}_1, B_2 \bar{Y}(R) = \bar{b}_2, \quad (18)$$

де B_1, B_2 – прямокутні матриці порядку $2(N+1) \times 4(N+1)$.

Розв'язок крайової задачі (17), (18) здійснюється стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Числові результати та їх обговорення. Достовірність і точність отримуваних результатів підтверджено порівнянням розв'язків, отриманих на основі розглянутої методики, та розв'язку, отриманого за шарнірного закріплення торців із використанням методів відокремлення змінних за допомогою розвинення розв'язку в ряди Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації, описаного в роботі [8].

На основі запропонованого підходу проведемо дослідження напруженого стану тришарових суцільних циліндрів із неперервно-неоднорідним заповнювачем, що перебувають під дією рівномірно-розподіленого нормального навантаження за двох граничних умов на торцях.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: $R = 6l_0$, $l = 14l_0$; внутрішній шар виготовлений із нержавіючої сталі ($E_1 = 200$ ГПа, $\nu_1 = 0,29$) і має сталу товщину $h_1 = l_0$; середній шар виготовлений із неперервно-неоднорідного матеріалу і має товщину $h_2 = 2l_0; 4l_0$; відповідно, зовнішній шар виготовлений з оксиду алюмінію ($E_3 = 380$ ГПа,

$\nu_3 = 0,25$) і має товщину $h_3 = 3l_0; l_0$. Для середнього шару вибрано матеріал, модуль пружності якого має квадратичну $E_2(r) = ar^2 + br + c$ або лінійну $E_2(r) = dr + e$ ($r_1 \leq r \leq r_2$) залежність від радіальної координати, при цьому коефіцієнт Пуассона дорівнює середньому арифметичному значенню коефіцієнтів сусідніх шарів $\nu_3 = 0,27$. Залежно від товщини середнього шару для відповідних сталих законів зміни модуля Юнга вибрано величини: $a = 20; b = 10; c = 170; d = 90; e = 110$ для товщини $h_2 = 2l_0$ і $a = 5; b = 15; c = 180; d = 45; e = 155$ для товщини $h_2 = 4l_0$.

Результати розв'язання задачі наведено в середньому перерізі довжини циліндра на рис. 1, 2 для розподілу полів радіальних σ_r та колових σ_θ напружень уздовж радіуса циліндра для квадратичного (суцільні лінії) та лінійного (пунктирні лінії) законів зміни модуля пружності та для двох варіантів товщини середнього шару: товщині $h_2 = 2l_0$ відповідають криві (1), товщині $h_2 = 3l_0$ – криві (2).

Величина радіальних напружень, як видно з рис. 1, суттєво не залежить від способу закріплення торців. Відмінність між напруженнями дещо помітна у внутрішньому шарі і становить приблизно 2,5 % поблизу осі циліндра для обох значень товщини середнього шару та законів зміни модуля Юнга. В інтервалі, наближеному до зовнішньої поверхні, радіальні напруження збігаються для обох законів зміни модуля пружності та товщини заповнювача, що пов'язано з необхідністю задовольняння граничних умов на бічній поверхні циліндра.

В інтервалі, близькому до середини циліндра, величина радіальних напружень практично не залежить від закону зміни модуля пружності та товщини середнього шару. Збільшення товщини середнього шару впливає на збільшення величини радіальних напружень на осі циліндра в межах 6,3 %.

На відміну від радіальних (рис. 2), колові напруження більш чутливі до зміни товщини середнього шару та способу закріплення торців. Так, на зовнішній поверхні циліндра величина колових напружень збільшується на 8 % у випадку шарнірного закріплення торців порівняно із жорстким для товщини середнього шару $h_2 = 4l_0$ і на 4,5% – у середині циліндра для товщини $h_2 = 2l_0$. При цьому на осі циліндра відмінність між напруженнями залежно від способу закріплення торців аналогічна радіальним напруженням. Вплив зміни закону модуля пружності так само не суттєвий. Зменшення товщини середнього шару призводить як до кількісної, так і до якісної зміни колових напружень.

На рис. 3 наведено графіки розподілу радіальних (рис. 3, а) та колових (рис. 3, б) напружень на торцях циліндрів за жорсткого закріплення торців, де, на відміну від шарнірного закріплення, мають

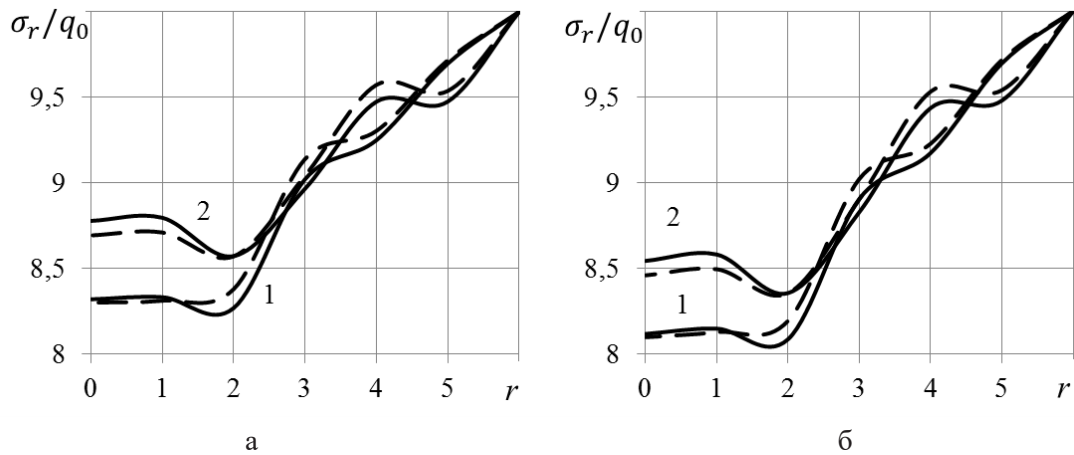


Рис. 1. Розподіл радіальних напружень σ_r за шарнірного (а) та жорсткого (б) закріплення торців у перерізі $z = l/2$

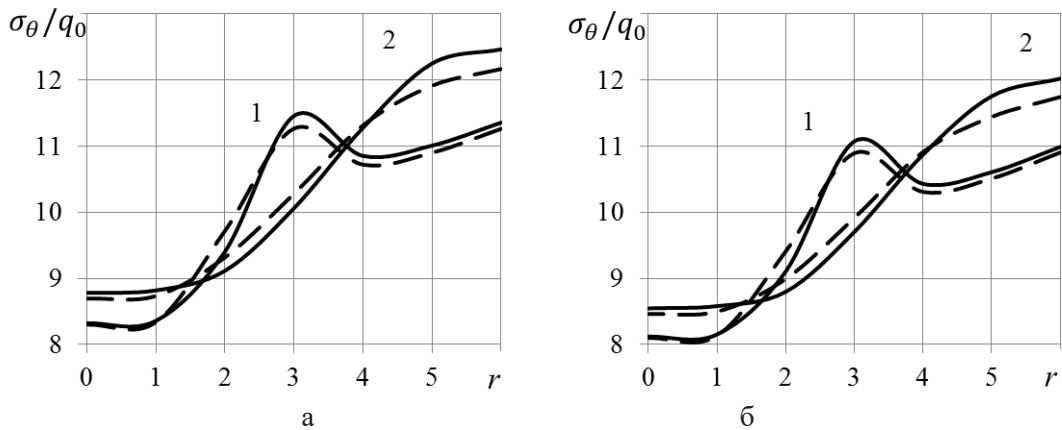


Рис. 2. Розподіл колових напружень σ_θ за шарнірного (а) та жорсткого (б) закріплення торців у перерізі $z = l/2$

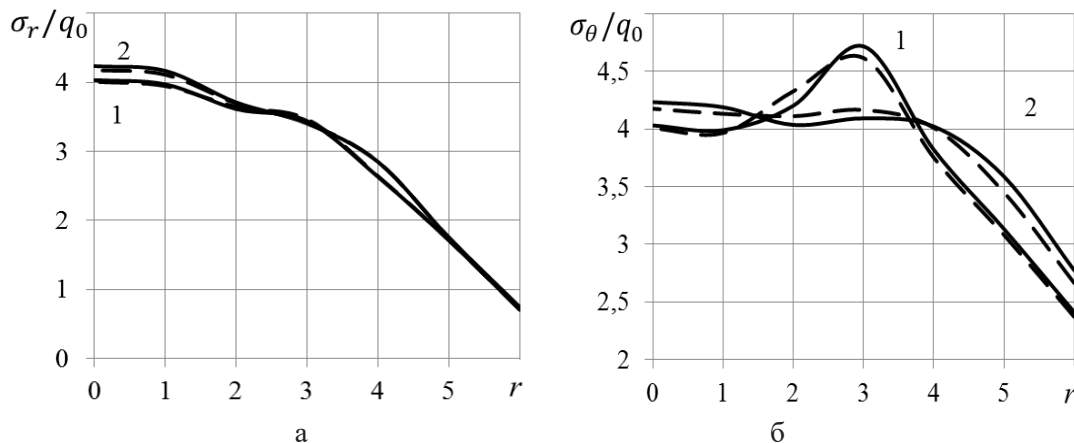


Рис. 3 Розподіл радіальних σ_r (а) та колових σ_θ (б) напружень за жорсткого закріплення торців у перерізі $z = 0$

місце крайові ефекти, що полягають у стрімкому зростанні величини як радіальних, так і колових напружень. При цьому радіальні напруження менш чутливі до варіації закону зміни модуля

пружності та товщини середнього шару. Вздовж радіальної координати величина напружень σ_r зменшується від осі до зовнішньої поверхні приблизно на 15 %.

Для колових напружень у випадку товщини середнього шару $h_2 = 2l_0$ на його границі, що збігається із середнім перерізом циліндра, величина напружень зростає приблизно на 15 %, а потім монотонно спадає, зменшуючись приблизно в 1,5 раза. У випадку більшої товщини середнього шару ($h_2 = 4l_0$) величина колових напружень в інтервалі зміни радіальної координати ($0 \leq r \leq 3/4R$) практично не змінюється, а далі монотонно спадає, зменшуючись приблизно на 15 % на зовнішній поверхні.

Висновки. На основі методу сплайн-апроксимації функцій в поєднанні з чисельним методом дискретної ортогоналізації розв'язано вісесиметричну задачу лінійної теорії пружності про напружений стан суцільних тришарових цилін-

дрів із неперервно-неоднорідним заповнювачем, що перебувають під дією рівномірно-розподіленого радіального навантаження за різних способів закріплення торців. Розглядаються два закони зміни модуля пружності середнього шару від радіальної координати – квадратичний і лінійний та два варіанти товщини середнього шару.

Встановлено, що в умовах розглядуваної задачі закон зміни модуля пружності суттєво не впливає на розподіл характеристик напруженого стану даного класу циліндрів.

Спосіб закріплення торців більшою мірою впливає на величину колових напружень як на зовнішній поверхні циліндра, так і в середньому його перерізі. Для радіальних напружень цей вплив помітний на осі циліндра.

ЛІТЕРАТУРА

1. Процюк Б. В. Про подання розв'язку квазістатичної задачі термopужності для багатошарового циліндра. *Прикл. пробл. мех. і мат.* 2023. Вип. 21. С. 43–63.
2. Senapati A., Jena S.R. A computational scheme for fifth order boundary value problems. *Int. j. inf. tecnol.* 2022. No. 14. P. 1397–1404.
3. Ganendra B., Prabowo A., Muttaqie T., Adiputra R., Ridwan R., Fajri A., Thang Do Q., Carvalho H., Baek S. Thin-walled cylindrical shells in engineering designs and critical infrastructures: A systematic review based on the loading response. *Curved and Layered Structures*. 2023. Vol. 10. No. 1 (20220202).
4. Гребенюк С. М., Морозова І. Ю. Ефективні пружні характеристики волокнистого композиційного матеріалу в умовах попереднього поперечного деформування. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2023. № 2. С. 38–44.
5. Shtanko H.I., Grebenyuk S.M. Features of the construction of the stiffness matrix of the spatial hexagonal finite element for composite material with discrete inclusions based on the moment scheme. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2023. No. 2. P. 75–85.
6. Mendil F., Bechir H., Methia M. Effect of nonhomogeneity on compression of solid circular cylinders made of functionally graded incompressible neo-Hookean materials. *Meccanica*. 2024. No. 59. P. 1625–1638.
7. Токова Л. П., Ясінський А. В. Напружений стан багатошарового неоднорідного циліндра за рівномірного стиску бічної поверхні. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2013. № 11. С. 101–107.
8. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Rozhok L.S. Solving the stress problem for solid cylinders with different end conditions. *Int. Appl. Mech.* 2006. Vol. 42. No. 6. P. 629–635.

REFERENCES

1. Protsiuk, B.V. (2023). Pro podannia rozv'iazku kvazistatichnoi zadachi termopruzhnosti dlia bahatosharovoho tsylindra [On the presentation of the solution of the quasi-static thermoelasticity problem for a multilayer cylinder]. *Prykladni problemy mekhaniky i matematyky*, 21, 43–63 [in Ukrainian].
2. Senapati, A., Jena, S.R. (2022). A computational scheme for fifth order boundary value problems. *Int. j. inf. tecnol.*, 14, 1397–1404.
3. Ganendra, B., Prabowo, A., Muttaqie, T., Adiputra, R., Ridwan, R., Fajri, A., Thang, Do Q., Carvalho, H., Baek, S. (2023). Thin-walled cylindrical shells in engineering designs and critical infrastructures: A systematic review based on the loading response. *Curved and Layered Structures*, 10 (1), 20220202.
4. Hrebeniuk, S.M., Morozova, I.Yu. (2023). Efektyvni pruzhni kharakterystyky voloknystoho kompozytsiinoho materialu v umovakh poperednoho poperechnoho deformuvannia [Effective elastic characteristics of fibrous composite material under conditions of preliminary transverse deformation]. *Computer Science and Applied Mathematics*, 2, 38–44 [in Ukrainian].
5. Shtanko, H.I., Grebenyuk, S.M. (2023). Features of the construction of the stiffness matrix of the spatial hexagonal finite element for composite material with discrete inclusions based on the moment scheme. *Computer Science and Applied Mathematics*, 2, 75–85.
6. Mendil, F., Bechir, H., Methia, M. (2024). Effect of nonhomogeneity on compression of solid circular cylinders made of functionally graded incompressible neo-Hookean materials. *Meccanica*, 59, 1625–1638.
7. Tokova, L.P., Yasynskyi, A.V. (2013). Napruzhnyi stan bahatosharovoho neodnorodnoho tsylindra za rivnomirnogo stysku bichnoi poverkhni [Stress state of a multilayer inhomogeneous cylinder under uniform compression of the lateral surface] *Prykladni problemy mekhaniky i matematyky*, 11, 101–107 [in Ukrainian].
8. Grigorenko, Ya.M., Grigorenko, A.Ya., Rozhok, L.S. (2006). Solving the stress problem for solid cylinders with different end conditions. *Int. Appl. Mech.*, 42 (6), 629–635.

ЗГИН ПЛАСТИНИ З ПРУЖНОЮ КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ ВСЕРЕДИНІ ШАЙБИ ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Слободян М. С.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0001-5357-8584,
mykola.slobodyan@lnu.edu.ua*

Звізло І. С.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна,
orcid.org/0009-0004-9804-6572
ivan.zvizlo@lnu.edu.ua*

Білаш О. В.

*кандидат економічних наук, магістр з прикладної математики,
доцент кафедри інженерної механіки
Національна академія сухопутних військ
імені гетьмана Петра Сагайдачного
вул. Героїв Майдану, 32, Львів, Україна
orcid.org/0000-0001-7515-7641
oksana.opanasovych@gmail.com*

Смаль О. В.

*студент
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0009-0002-4495-6648,
oleh.smal@lnu.edu.ua*

Ключові слова: тріщина, згин, пружна шайба, ізотропна пластинка, контакт, комплексні потенціали, задачі лінійного спряження, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності.

У роботі розв'язано задачу про двовісний згин безмежної ізотропної пластини з пружною круговою шайбою з іншого матеріалу та наскрізною прямолінійною радіальною тріщиною у шайбі. Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження, а на межі пружної кругової шайби та пластини виконуються умови ідеального механічного контакту. Для розв'язування задачі припускається, що під дією рівномірно розподілених згинальних моментів на нескінченності береги тріщини контактують по області сталої ширини (смуговий контакт) на верхній основі пластини по всій довжині тріщин. Задача розв'язана за таких крайових умов: $P_{r1} = P_{r2}$, $M_{r1} = M_{r2}$, $w_1 = w_2$, $\frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r}$, $\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}$, $\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}$, $u_{rp}^{(1)} = u_{rp}^{(2)}$, $u_{\theta p}^{(1)} = u_{\theta p}^{(2)}$, на L (умови ідеального механічного контакту); $P^\pm = 0$, $M_{y_1}^\pm = \delta h N$, $\tau_{yx_1 y_1}^\pm = 0$, $\sigma_{yy_1 y_1}^\pm = -0,5 N/h$, $\partial[v_{II}]/\partial x_1 + \alpha h [\partial^2 w / \partial x_1 \partial y_1] = 0$, $\alpha = 0.5(1 + (1 - \gamma)^2)$,

$\delta = 1 - \gamma/3$ (умови смугового контакту берегів тріщини), $\gamma = h_1/h$, $x_1 \in L_1$, де M_r – згинальний момент, P_r – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізуювальна сила, σ_{rr} і σ_{rr0} – компоненти тензора напружень у полярній системі координат, N – контактне зусилля між берегами тріщини, h – товщина пластини, h_1 – висота контакту берегів тріщини, w – прогин пластини, σ_{yy_1} і τ_{xy_1} – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, v_{rr} – компонента вектора переміщень; $[f] = f^+ - f^-$, знаками «+» і «-» позначені граничні значення функцій при прямуванні точки площини до тріщини, якщо $y_1 \rightarrow \pm 0$.

Через контакт берегів тріщини розв'язок задачі шукатимемо у вигляді розв'язків двох взаємопов'язаних задач: задачі згину пластини, використовуючи теорію Кірхгофа – Лява, та плоскої задачі. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі побудовано задачі лінійного спряження. Отримано задачі лінійного спряження розв'язані аналітично, та отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно стрибків переміщень у плоскій задачі та стрибків кутів повороту в задачі згину на берегах тріщини. Ця система сингулярних інтегральних рівнянь за допомогою методу механічних квадратур зведена до системи алгебраїчних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу Гауса. Проведено числовий аналіз задачі та побудовані графічні залежності контактних зусиль і коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів за різних геометричних параметрів задачі та різних значень рівномірно розподілених згинальних моментів на нескінченності. У часткових випадках отримані результати зійшлися з відомими результатами, отриманими в наукових працях іншими авторами.

Ключові слова: тріщина, згин, пружна шайба, ізотропна пластинка, контакт, комплексні потенціали, задачі лінійного спряження, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності.

BENDING OF THE PLATE WITH AN ELASTIC CIRCULAR WASHER AND A RADIAL CRACK INSIDE THE WASHER CONSIDERING THE STRIP CONTACT OF ITS EDGES

Slobodian M. S.

*Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5357-8584,
mykola.slobodyan@lnu.edu.ua*

Zvizlo I. S.

*Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0009-0004-9804-6572
ivan.zvizlo@lnu.edu.ua*

Bilash O. V.

*Ph.D. in Economic Sciences, Master of Applied Mathematics,
Associate Professor at Department of Engineering Mechanics
Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy
Heroiv Maydana str., 32, Lviv, Ukraine,
orcid.org/0000-0001-7515-7641
oksana.opanasovych@gmail.com*

Smal O. V.

*Student
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0009-0002-4495-6648
oleh.smal@lnu.edu.ua*

Key words: crack, bending, elastic washer, isotropic plate, contact, complex potentials, linear conjugation problems, contact force, intensity factors.

This work presents a solution of biaxial bending of an infinite isotropic plate with an elastic circular washer made of a different material and a through straight crack inside the washer. The edges of the crack are free from external loads and the conditions of ideal mechanical contact are fulfilled at the boundary of the elastic circular washer and the plate. It is assumed that under the action of uniformly distributed bending moments at infinity, the edges of the crack are in contact on area of constant width (strip contact) on the upper base of the plate along the entire length of the cracks. The problem is solved under the following boundary conditions: $P_{r1} = P_{r2}$, $M_{r1} = M_{r2}$, $w_1 = w_2$, $\frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r}$, $\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}$, $\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}$, $u_{rP}^{(1)} = u_{rP}^{(2)}$, $u_{\theta P}^{(1)} = u_{\theta P}^{(2)}$, on L (conditions of ideal mechanical contact); $P^\pm = 0$, $M_{y_1}^\pm = \delta h N$, $\tau_{rx_1y_1}^\pm = 0$, $\sigma_{rr}^\pm = -0,5 N/h$, $\partial[v_\theta]/\partial x_1 + \alpha h[\partial^2 w/\partial x_1 \partial y_1] = 0$, $\alpha = 0,5(1 + (1 - \gamma)^2)$, $\delta = 1 - \gamma/3$ (conditions of strip contact of crack edges), $\gamma = h_1/h$, $x_1 \in L_1$, where M_r – bending moment, P_r – generalized Kirchhoff shear force, σ_{rr} and $\sigma_{r\theta}$ – stress tensor components in the polar coordinate system, N – contact force between the edges of the crack, h – plate thickness, h_1 – height of the contact zone of crack, w – plate deflection, $\sigma_{rx_1y_1}$ and $\tau_{rx_1y_1}$ – stress tensor components in the Cartesian coordinate system, v_θ – displacement vector component; $[f] = f^+ - f^-$, the “+” and “-” signs indicate the boundary values of the function when the point of the plane approaches the crack at $y_1 \rightarrow \pm 0$.

Due to the contact of the crack edges, the solution to the problem will be sought as a superposition of two interrelated problems: the problem of the plate bending, using the Kirchhoff–Love theory and the plane problem. Using the methods of the theory of functions of a complex variable and complex potentials of Kolosov–Muskhelishvili, linear conjugate problems were constructed. The obtained linear conjugate problems are solved analytically and a system of singular integral equations was obtained for the displacement jumps in the plane problem and the jumps of rotation angles in the bending problem at the crack edges. The system of singular integral equations was reduced to a system of algebraic equations, using the method of mechanical quadrature and was solved numerically by the Gaussian method. A numerical analysis of the problem is conducted and graphic dependencies of contact forces and intensity coefficients of forces and moments were constructed for different geometric parameters of the problem and different values of uniformly distributed bending moments at infinity. In some cases, the results obtained coincided with the known results obtained in scientific works by other authors.

Вступ та огляд літератури. Пластинчасті конструктивні елементи широко використовуються в різних сферах техніки. Вони можуть містити локальні технологічні включення, а під час експлуатації в таких елементах можуть утворюватися тріщини, що суттєво знижують допустиме навантаження, яке можна прикладати до конструкції. З фізичного погляду очевидно, що за згину пластини береги тріщин взаємодітимуть між собою. Тому розробка методів оцінки напружено-деформованого стану пластин із тріщинами, береги яких контактують у разі згину, є важливою науково-технічною проблемою механіки.

Дослідження напружено-деформованого стану пластин із тріщинами за згину пластини з використанням класичної теорії згину пластин проведено в роботах [1–4]. У них припускалося, що береги тріщини контактують по лінії по всій довжині тріщини на верхній поверхні пластини (лінійний контакт). Кальтгоф Дж. Ф., Шацький І. П. і Бюргель А. [5] ек-

периментально вивчали контактну взаємодію берегів тріщини за згину пластини та підтвердили наявність мембранної складової в полі напружень поблизу тріщини, що є прямим наслідком контакту її берегів.

У працях [6, 7] уперше побудовано аналітичний розв'язок задачі про згин пластини з наскрізною тріщиною, береги якої контактують по висоті пластини (смуговий контакт). Напружено-деформований стан за згину безмежної пластини з прямолінійними тріщинами за смугового контакту їхніх берегів і круговим отвором або абсолютно жорсткою круговою шайбою розглянуто в [8–10]. Дослідження напружено-деформованого стану тіл з міжфазними тріщинами із зонами контакту проведено в роботах [11, 12]. Вплив контакту берегів термоізолюваної міжфазної тріщини за термомеханічного навантаження на напружено-деформований стан досліджено в [13]. Тому задачі згину пластин з отворами, включеннями та тріщинами, береги яких контактують, є актуальними.

У цій роботі досліджується задача про згин нескінченної ізотропної пластини з пружним круговим включенням і прямолінійною наскрізною радіальною тріщиною, береги якої гладко контактують по області сталої ширини по всій їх довжині на верхній основі пластини.

Формулювання задачі. Розглянемо безмежну ізотропну пластину товщиною $2h$, яка містить пружну кругову шайбу радіуса R та прямолінійну наскрізну тріщину довжиною $2l$. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат Oxy з початком у центрі пружної шайби. У площині Oxy введемо полярну систему координат r і θ з полюсом у точці O та полярною віссю Ox . Центр радіальної тріщини розміщений у точці O_1 з координатами $(x_0, 0)$ на осі Ox . У точці O_1 виберемо початок декартової системи координат $O_1x_1y_1$, яка буде пов'язана з тріщиною. Нехай на нескінченності пластина згинається рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ . Через $S^+(S_1)$ позначимо область усередині пружної шайби, а через $S^-(S_2)$ – ззовні; через L_1 – лінію, де розміщена тріщина, а через L – колову межу пружної шайби (див. рис. 1).

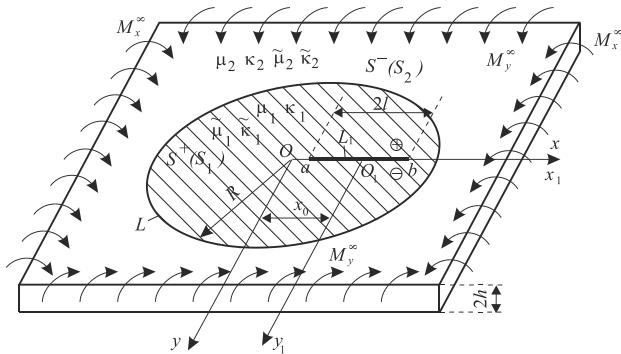


Рис. 1. Безмежна пластина з пружною шайбою та радіальною тріщиною

Пружним характеристикам пов'язаних із шайбою приписуватимемо індекс «1», а з пластинною – індекс «2». Зауважимо, що тут і в подальшому індекс j набуває значень 1 і 2, де $j=1$ відповідає шайбі (область S_1), $j=2$ – пластині (область S_2).

Вважатимемо, що за такого навантаження береги тріщин контактують по області сталої ширини величиною h_1 на верхній основі пластини по всій довжині тріщини (смуговий контакт). Через контакт берегів тріщини розв'язок задачі шукатимемо у вигляді розв'язків двох взаємопов'язаних задач: задачі згину пластини, використовуючи теорію Кірхгофа – Лява, та плоскої задачі.

На межі пружної шайби виконуються умови ідеального механічного контакту

$$P_{r1} = P_{r2}, \quad M_{r1} = M_{r2}, \quad w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r}, \quad \text{на } L, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}, \quad u_{rp}^{(1)} = u_{rp}^{(2)}, \quad u_{\theta p}^{(1)} = u_{\theta p}^{(2)}, \quad \text{на } L, \quad (2)$$

де P_{rj} – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізуюча сила, M_{rj} – згинальний момент, w_j – прогин j -ї частини; $\sigma_{rr}^{(j)}$, $\sigma_{r\theta}^{(j)}$ – компоненти тензора напружень, а $u_{rp}^{(j)}$, $u_{\theta p}^{(j)}$ – компоненти вектора переміщень у плоскій задачі в полярній системі координат r, θ .

Крайові умови смугового контакту берегів тріщини [7]

$$P^\pm = 0, \quad M_{y_1}^\pm = \delta h N_1, \quad \tau_{\mu y_1 y_1}^\pm = 0, \quad \sigma_{\mu y_1 y_1}^\pm = -\frac{N_1}{2h}, \quad (3)$$

$$\delta = 1 - \frac{\gamma}{3}, \quad x_1 \in L_1,$$

$$\frac{\partial [v_\Pi]}{\partial x_1} + \alpha h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1} \right] = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2} (1 + (1 - \gamma)^2),$$

$$\gamma = \frac{h_1}{h}, \quad x_1 \in L_1, \quad (4)$$

де N_1 – контактне зусилля між берегами тріщини, h_1 – висота контакту берегів тріщини, w – прогин пластини, $\sigma_{\mu y_1 y_1}$ і $\tau_{\mu x_1 y_1}$ – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, v_Π – компонента вектора переміщень; $[f] = f^+ - f^-$, знаками «+» і «-» позначені граничні значення функцій при прямуванні точки площини до тріщини, якщо $y_1 \rightarrow \pm 0$.

Розв'язок задачі

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі та задачі згину пластини [9, 14], задовольняючи крайові умови (1) – (4), розв'язок задачі зведемо до задач лінійного спряження, розв'язавши які, отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень $g'_i(t)$ та стрибків кутів повороту $Q_i(t)$ на берегах тріщини, яка набуде вигляду

$$\int_{L_1} (L(t, x) g'_1(t) + L^{(1)}(t, x) \operatorname{Re}(g'_1(t)) + M(t, x) g'_1(t)) dt = N(x), \quad x \in L_1, \quad (5)$$

$$\int_{L_1} (R(t, x) Q_1(t) + \bar{L}^{(1)}(t, x) \operatorname{Re} Q_1(t) + S(t, x) \bar{Q}_1(t)) dt + H(x) = M_n(x), \quad x \in L_1, \quad (6)$$

де

$$L(t, x) = -\frac{h}{\pi} \left\{ -\frac{\mu_1 - \mu_2}{A_1} \cdot \left(1 + \frac{R^2}{X^2} \right) \cdot \frac{1}{T} + \frac{1}{T - X} + \frac{1}{T - \bar{X}} + \frac{\mu_1 \kappa_2 - \mu_2 \kappa_1}{A_2} \cdot \frac{R^2}{X^2} \times \right.$$

$$\times \frac{\bar{X}}{XT - R^2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{A_1} \cdot \left(\frac{\bar{T}}{XT - R^2} + \left(1 + \frac{R^2}{X^2} \right) \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) \cdot \frac{R^2}{(XT - R^2)^2} - \right.$$

$$\left. \left. - \left(X - \frac{R^2}{\bar{X}} \right) \cdot \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) \cdot \frac{2R^2 T}{(XT - R^2)^3} \right) \right\},$$

$$M(t, x) = -\frac{h}{\pi} \left\{ -\frac{\mu_1 - \mu_2}{A_1} \cdot \frac{1}{T} + \frac{1}{T - X} + \frac{T - X}{(\bar{T} - \bar{X})^2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{A_1} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \left(\frac{R^2}{\bar{T}} - T \right) \frac{R^2}{(X\bar{T} - R^2)^2} + \left(1 + \frac{R^2}{\bar{X}^2} \right) \frac{T}{X\bar{T} - R^2} - \left(X - \frac{R^2}{\bar{X}} \right) \frac{T_k^2}{(X\bar{T} - R^2)^2} \right\}, \\
L^{(1)}(t, x) &= -\frac{2A_1 h t}{\pi R^2 (1 - A_4)} \left(\frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{A_1} + \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{A_1} - \frac{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}{A_2} \right) \frac{R^2}{\bar{X}^2} \right), \\
A_1 &= \mu_1 + \mu_2 \kappa_1, \quad A_2 = \mu_2 + \mu_1 \kappa_2, \quad A_3 = \frac{\mu_1 \kappa_2 - \mu_2 \kappa_1}{A_2}, \\
A_4 &= \frac{\mu_2 - \mu_1}{A_1}, \quad g = -\frac{A_1}{A_2}, \\
\widetilde{DZ}_j &= \tilde{A}_2^{-1} (\tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1) \quad \widetilde{D\Gamma}_j = \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{A}_1} \\
R(t, x) &= \frac{1}{2\pi \tilde{\mu}_1^*} \left\{ -\tilde{\kappa}_1^* \left(\frac{1}{T - X} - \frac{\tilde{\kappa}_1^* (\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) \bar{T}}{\tilde{A}_1 (X\bar{T} - R^2)} \right) + \right. \\
&+ \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{A}_1} \left(-\frac{1}{T} + \frac{R^2}{(T\bar{X} - R^2)^2} \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) \right) - \frac{2(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) R^2 T X}{\tilde{A}_1 (T\bar{X} - R^2)^3} \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) + \\
&+ \frac{R^2}{\bar{X}^2} \left\{ \frac{(\tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1) \bar{X}}{\tilde{A}_2 (T\bar{X} - R^2)} + \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{A}_1} \left(-\frac{1}{T} + \frac{R^2 (2T\bar{X} - R^2)}{(T\bar{X} - R^2)^3} \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) \right) - \frac{\tilde{\kappa}_1^*}{\bar{T} - \bar{X}} \right\} \Bigg\} \\
S(t, x) &= \frac{\tilde{\kappa}_1^*}{2\pi \tilde{\mu}_1^*} \left\{ -\frac{(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2)}{\tilde{A}_1} \left(\frac{R^2}{(T\bar{X} - R^2)^2} \left(\frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) - \frac{1}{\bar{T}} \right) + \frac{(\tilde{\kappa}_1^*)^{-1}}{\bar{T} - \bar{X}} - \frac{(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) T}{\tilde{A}_1 (T\bar{X} - R^2)} + \right. \\
&- \frac{T}{(\bar{T} - \bar{X})^2} - \frac{(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) R^2}{\tilde{A}_1 \bar{X}^2} \left(\frac{T\bar{X}}{T\bar{X} - R^2} + 1 \right) \cdot \frac{\tilde{\kappa}_1^*}{X\bar{T} - R^2} + \\
&+ X \left(\frac{1}{(\bar{T} - X)^2} + \frac{\tilde{\kappa}_1^* (\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) T^2}{\tilde{A}_1 (X\bar{T} - R^2)^2} \right) \Bigg\}, \\
\tilde{L}^{(1)}(t, x) &= \frac{t}{2\pi \tilde{\mu}_1^* R^2} \left(\tilde{D}_{31} (1 - \tilde{\kappa}_1^*) + \tilde{D}_{31} \frac{R^2}{\bar{X}^2} \right), \\
H(x) &= \frac{1}{\tilde{\mu}_1^*} \left\{ \Gamma_2 \left(\tilde{B}_{31} (1 - \tilde{\kappa}_1^*) + \frac{R^2}{\bar{X}^2} \tilde{B}_{91} \right) + \Gamma_2' \tilde{B}_{61} \right\}, \\
\tilde{A}_1 &= \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1, \quad \tilde{A}_2 = \tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2, \quad \tilde{A}_4 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\tilde{A}_1}, \\
\tilde{A}_5 &= \frac{\mu_2 (1 + \tilde{\kappa}_1)}{\tilde{A}_1}, \quad \tilde{B}_4 = -\frac{\tilde{A}_4 (\tilde{\kappa}_1^* - 1)}{1 - \tilde{A}_4}, \\
\tilde{B}_3 &= -\frac{1 - \tilde{g}^{-1} \tilde{A}_3}{1 - \tilde{A}_4}, \quad \tilde{B}_5 = -\frac{\tilde{A}_4 (\tilde{\kappa}_1^* + 1)}{1 + \tilde{A}_4}, \quad \tilde{g} = -\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2}, \\
\tilde{B}_{11} &= 0, \quad \tilde{B}_{21} = A_1^{-1} (\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1), \\
\tilde{B}_{31} &= A_1^{-1} [2\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_1 (\tilde{\kappa}_2 - 1)], \quad \tilde{B}_{41} = \tilde{A}_1^{-1} \tilde{\mu}_1 (1 + \tilde{\kappa}_2), \\
B_{51} &= \tilde{B}_{31} + \tilde{B}_3 \tilde{B}_{21}, \quad \tilde{D}_{31} = \tilde{B}_4 \tilde{B}_{21}, \\
\tilde{B}_{61} &= \tilde{A}_2^{-1} (\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2), \quad \tilde{B}_{71} = \tilde{A}_2^{-1} (\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2), \quad \tilde{B}_{81} = 0, \\
\tilde{B}_{91} &= \tilde{B}_{51} - \tilde{B}_{71} \tilde{B}_3, \quad \tilde{\mu}_j^* = \tilde{\mu}_j, \\
\tilde{D}_{51} &= 2\tilde{B}_{11} + B_3 (\tilde{B}_{21} - \tilde{B}_{71}) + \tilde{B}_{81} + \tilde{B}_{41}, \quad X = x_0 + x_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T &= x_0 + t_1, \quad \kappa_j = \frac{3 - v_j}{1 + v_j}, \\
\Gamma_2 &= -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D_2(1 + v_2)}, \quad \Gamma_2' = \frac{M_x^\infty - M_y^\infty}{2D_2(1 - v_2)}, \quad D_2 = \frac{2E_2 h^3}{3(1 - v_2^2)}, \\
\tilde{\kappa}_j^* &= \tilde{\kappa}_j = \frac{3 + v_j}{1 - v_j}, \\
Q_1(t) &= -\frac{i}{1 + \tilde{\kappa}_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} + i \frac{\partial w}{\partial y_1} \right], \quad Q_1(t) = Q_{11}(t) + i Q_{12}(t), \\
g_1'(t) &= \frac{2\mu_1}{i(1 + \kappa_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} ([u_p^{(1)}] + i[v_p^{(1)}]), \\
g_1'(t) &= g_{11}'(t) + i g_{12}'(t),
\end{aligned}$$

де $Q_{11}(t), Q_{12}(t), g_{11}'(t), g_{12}'(t)$ – дійсні невідомі функції; $\mu_j = E_j/(2(1 + v_j))$, E_j і v_j – відповідно модуль пружності і коефіцієнт Пуассона для j -ї області, $j = 1, 2$.

З крайової умови (4) матимемо

$$g_{11}'(x_1) + \frac{1 + \tilde{\kappa}_1}{(1 + \kappa_1)(1 + v_1)} Q_{11}(x_1) = 0, \quad x_1 \in [-l, l]. \quad (7)$$

Зауважимо, що мають виконуватись умови однозначності прогину й кутів повороту нормалі до серединної поверхні за обходу контуру тріщини, які набудуть вигляду

$$\int_{L_1} Q_1(t) dt = 0, \quad \int_{L_1} t \operatorname{Im} Q_1(t) dt = 0. \quad (8)$$

Таким чином, щоб визначити невідомі функції $g_1'(t), Q_1(t)$, ми маємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (5) – (8), яку розв'язуватимемо чисельно методом механічних квадратур [14, 15].

Чисельний аналіз

На рис. 2 наведено графік зведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$, якщо $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 1$, $\lambda = R/l = 5$, $X_0 = x_0/l = 3$, $\gamma = h_1/h = 0.13$. Крива 1 побудована для $\beta = \lg \frac{E_1}{E_2} = -1$, крива 2 – для $\beta = -0.3$, крива 3 – для $\beta = 0$, крива 4 – для $\beta = 0.3$, крива 5 – для $\beta = 1$. Якщо $\beta < 0$, величина контактного зусилля є максимальною у вершині a ($\xi = -1$), а якщо $\beta > 0$ – максимальна у вершині b ($\xi = 1$), поблизу межі пружної шайби.

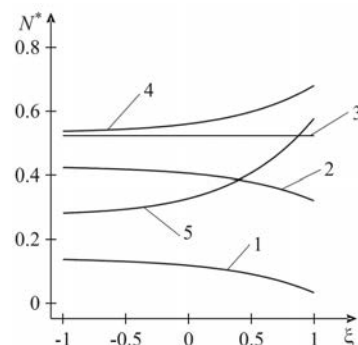


Рис. 2. Графік контактного зусилля N^* між берегами тріщини при різних β

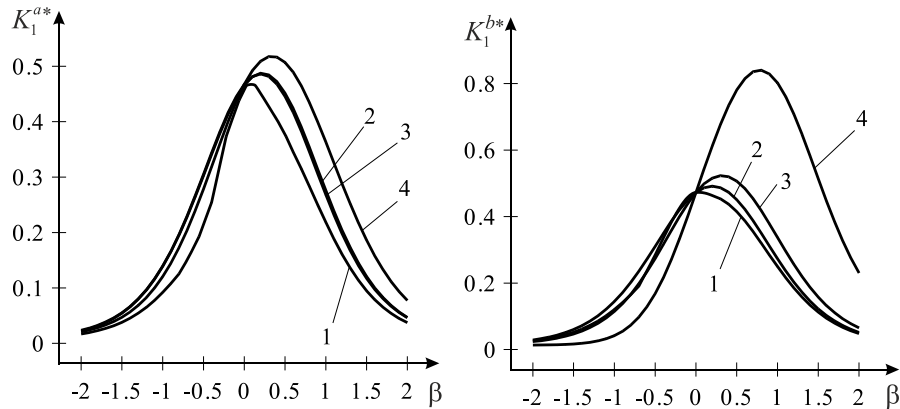


Рис. 3. Графік коефіцієнтів інтенсивності моментів K_1^* у вершинах тріщини a та b від $\beta = \lg E_1/E_2$ за різних значень X_0

На рис. 3 побудовано графіки коефіцієнтів інтенсивності моментів (КІМ) $K_1^* = K_1/(M_y^* \sqrt{l})$ у вершинах тріщини a та b від $\beta = \lg E_1/E_2$ для $\lambda = 4$, $\rho = 1$, $\gamma = 0.13$. Криві 1 побудовані для $X_0 = 0$, криві 2 – для $X_0 = 0.3$, криві 3 – для $X_0 = 1.3$, криві 4 – для $X_0 = 2$. Якщо $\beta < 0$, КІМ у вершинах тріщини a та b зростають зі збільшенням β . Якщо $\beta > 0$, величина КІМ у вершині тріщини b є більшою за величину КІМ у її вершині a . Крім того, з наближенням вершини тріщини b до колової межі поділу матеріалів, якщо $\beta > 0$, КІМ у ній збільшуються для будь-якого фіксованого β .

Висновки. У цій роботі вперше побудовано розв’язок задачі про згин нескінченної пластини з пружним включенням і прямолінійною радіальною тріщиною у цьому включенні, за смугового контакту її берегів, а також досліджено вплив модулів пружності матеріалів пластини та пружної шайби на контактне зусилля й коефіцієнти інтенсивності моментів у вершинах тріщини.

Коли модулі пружності матеріалу пластини та пружної шайби є однаковими ($\beta = 0$), отримаємо випадок однієї ізольованої тріщини за смугового контакту її берегів у пластині [6, 7], а якщо $\beta = 0$ і $\gamma = 0$, отримаємо випадок однієї ізольованої тріщини за лінійного контакту її берегів [1, 2]. Як показав чисельний аналіз, зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль $k_1^* = k_1/(M_y^* \sqrt{l})$ і моментів $K_1^* = K_1/(M_y^* \sqrt{l})$ пов’язані залежністю $k_1^*/K_1^* = 3\alpha(1 + \nu_1)/(3 + \nu_1)$, тому графічні залежності для k_1^* не наведені в роботі.

У перспективі планується дослідити напружено-деформований стан пластини з пружним включенням і системою наскрізних прямолінійних тріщин, які розміщені як у пластині, так і у пружному включенні, за смугового контакту їхніх берегів. А також із застосуванням енергетичного критерію руйнування планується визначити величину максимального навантаження, яке можна бути прикладене до такої пластини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. *Доповіді Академії наук УРСР. Серія А. Фізико-математичні та технічні науки*. 1988. № 7. С. 4951.
2. Young M., Sun C. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates. *International Journal of Fracture*. 1992. Vol. 55. P. 81–93.
3. Shatskyi I., Dalyak T. Interaction of contact cracks and narrow slits in plate bending. *Procedia Structural Integrity*. 2018. Vol. 13. P. 1476–1481.
4. Dalyak T.M., Shatskyi I.P. Interference of closable cracks and narrow slits in an elastic plate under bending. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2020. Vol. 14, no. 2. P. 51–68.
5. Кальтгоф Дж. Ф., Шацький І. П., Бюргель А. Експериментальне підтвердження контакту берегів тріщини при згині пластини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: у 3 т. / під заг. ред. В. В. Панасюка*. Львів : Каменяр, 1999. Т. 1. С. 72–74.
6. Dempsey J.P., Shekman I.I., Slepyan L.L. Closure of a through crack in a plate under bending. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. P. 4077–4089.
7. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь. *Наукові нотатки Луцького технічного університету*. 2007. Вип. 20 (2). С. 123–127.
8. Слободян М. С., Кузь І. С., Білаш О. В., Шайнога М. І. Згин із розтягом пластини з отвором та системою тріщин за смугового контакту їхніх берегів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2020. № 1. С. 77–85.

9. Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь : колективна монографія. Кундрат М. М., Гук Н. А., Козакова Н. Л., Острик В. І., Слободян М. С. та інші ; за заг. ред. Р. М. Мартиняка. Львів : Видавець Вікторія Кундельська, 2022. 392 с.
10. Slobodian M., Zvizlo I., Bilash O., Sorokatyi M., Petruchenko O., Markevych L. Bending of a piecewise homogeneous plate with a circular interfacial materials separation zone and radial crack considering the strip contact of its edges. *Vibroengineering Procedia*. 2024. Vol. 55. P. 54–59.
11. Adlucky V.J., Loboda V.V. Finite-element analysis of the elastoplastic state of a plane with elliptic inclusion in the presence of interface crack. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270, no. 1. P. 76–86.
12. Loboda V., Sheveleva A., Mykhail O. A slipping zone model for a conducting interface crack in a piezoelectric biomaterial. *Mechanics and Physics of Structured Media: Asymptotic and Integral Equations Methods of Leonid Filshinsky*. 2022. P. 253–269.
13. Serednytska K.I., Martynyak R.M. Contact of the faces of an interface thermally insulated crack under thermomechanical loading. *Materials Science*. 2021. Vol. 57, no. 2. P. 173–179.
14. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.
15. Саврук М. П., Зеленьак В. М. Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. Львів : РАСТР, 2009. 212 с.

REFERENCES

1. Shatskyi, I.P. (1988). Zghyn plastyny, oslablenoi rozrizom z kontaktuiuchymy berehamy [Bending of a plate weakened by a section with contacting shores]. *Dopovidi Akademii nauk URSS. Seriya A. Fizyko-matematychni ta tekhnichni nauky* [Report of the USSR Academy of Sciences. Ser. A. Phys.-Math. and Tech. Science], 7, 49–51 [in Ukrainian].
2. Young, M., Sun, C. (1992). Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates. *International Journal of Fracture*, 55, 81–93.
3. Shatskyi, I., Dalyak, T. (2018). Interaction of contact cracks and narrow slits in plate bending. *Procedia Structural Integrity*, 13, 1476–1481.
4. Dalyak, T.M., Shatskyi, I.P. (2020). Interference of closable cracks and narrow slits in an elastic plate under bending. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 14 (2), 51–68.
5. Kalthof, Dzh.F., Shatskyi, I.P., Biurhel, A. (1999). Eksperymentalne pidtverdzhenia kontaktu berehiv trishchyny pry zghyni plastyny [Experimental confirmation of the contact of the crack]. *Mekhanika ruinuвання materialiv i mitsnist konstruktiv* [Mechanics of fracture of materials and strength of structures] (eds V.V. Panasiuk). Lviv: Kameniar. 1, 72–74 [in Ukrainian].
6. Dempsey J.P., Shekhtman I.I., Slepyan L.L. (1998). Closure of a through crack in a plate under bending. *International Journal of Solids and Structures*, 35, 4077–4089.
7. Opanasovych, V.K. (2007). Zghyn plastyny z naskriznoi priamoliniinoiu trishchynoiu z urakhuvanniam shyryny oblasti kontaktu yii poverkhon [Bending of a plate with a through rectilinear crack taking into account the width of the contact area of its surfaces]. *Naukovi notatky Lutskoho tekhnichnoho universytetu* [Scientific Notes of Lutsk Technical University], 20 (2), 123–127 [in Ukrainian].
8. Slobodian, M.S., Kuz, I.S., Bilash, O.V., Shaynoga, M.I. (2020). Zghyn iz roztyahom plastyny z otvorom ta systemoyu trishchyn za smuhovoho kontaktu yikhnikh berehiv [Bending and Tension of a Plate with a Hole and System of Cracks on the Assumption of Striplike Crack Closure]. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu. Fizyko-matematychni nauky* [Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences], 1, 77–85 [in Ukrainian].
9. Kundrat, M.M., Huk, N.A., Kozakova, N.L., Ostryk, V.I., Slobodian, M.S., and others (2022). Kontaktna mekhanika. Shorstkist, rozsharuvannya i znoshuvannya poverkhon: kolektyvna monohrafiya [Contact mechanics. Roughness, delamination and wear of surfaces: collective monograph]; under the general editorship of R.M. Martynyak. Lviv: Publisher Viktoriia Kundelska [in Ukrainian].
10. Slobodian, M., Zvizlo, I., Bilash, O., Sorokatyi, M., Petruchenko, O., Markevych, L. (2024). Bending of a piecewise homogeneous plate with a circular interfacial materials separation zone and radial crack considering the strip contact of its edges. *Vibroengineering Procedia*, 55, 54–59.
11. Adlucky, V.J., Loboda, V.V. (2023). Finite-element analysis of the elastoplastic state of a plane with elliptic inclusion in the presence of interface crack. *Journal of Mathematical Sciences*, 270 (1), 76–86.
12. Loboda, V., Sheveleva, A., Mykhail, O. (2022). A slipping zone model for a conducting interface crack in a piezoelectric biomaterial. *Mechanics and Physics of Structured Media: Asymptotic and Integral Equations Methods of Leonid Filshinsky*, pp. 253–269.
13. Serednytska, K.I., Martynyak, R.M. (2021). Contact of the faces of an interface thermally insulated crack under thermomechanical loading *Materials Science*, 57 (2), 173–179.
14. Sulim, G.T. (2007). Osnovy matematychnoy teoriiy termo pruzhnoyi rinvovahy deformivnykh tverdykh til z tonkymy vkluchennyamy [Fundamentals of the mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable solids with thin inclusions]. Lviv: Research and Publishing Center of the Shevchenko Scientific Society [in Ukrainian].
15. Savruk, M.P., Zeleniak, V.M. (2009). Dvovymirni zadachi teorii pruzhnosti dlia kuskovo-odnorodnykh til z trishchynamy [Two-dimensional problems of the theory of elasticity for piecewise homogeneous bodies with cracks]. Lviv: RASTR [in Ukrainian].

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-07>

ГОМОГЕНІЗАЦІЯ ТРАНСТРОПНОГО КОМПОЗИТА З ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПОРОЖНИННОГО ВОЛОКНА

Спиця О. Г.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри загальної математики
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-7150-7736
spytso.o.g@gmail.com*

Гоменюк С. І.

*доктор технічних наук, професор,
декан математичного факультету
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-7340-5947
gserega71@gmail.com*

Кудін О. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-5917-9127
avk256@gmail.com*

Столярова А. В.

*доктор філософії,
доцент кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0003-2783-2889
stolyarova.a.v@znu.edu.ua*

Ключові слова: випадкові параметри композита, нормальний закон розподілу, математичне сподівання, щільність розподілу, гомогенізація, ефективні характеристики.

Під час проектування конструкцій з композитних матеріалів на практиці використовують модель композита у вигляді суцільного однорідного середовища. Фізико-механічні його властивості як однорідного матеріалу відображають ефективні сталі. Звичайно, параметри складових частин компонентів композита є випадковими величинами. Тому його ефективні сталі теж є випадковими величинами. У зв'язку з цим актуальною задачею є гомогенізація композита з урахуванням стохастичності його параметрів, у тому числі визначення характеристик пружних сталей як випадкових величин.

У роботі об'єктом дослідження є односпрямований волокнистий композит, фазами якого є трансверсально-ізотропні матриця та порожнисте волокно. Радіус волокна та порожнини у ньому моделюються випадковими

величинами, що мають нормальний закон розподілу. Відповідно, ефективні параметри композита також є випадковими величинами. Запропоновано методику визначення математичного сподівання ефективного поздовжнього модуля пружності, яку можна застосувати для знаходження інших числових характеристик ефективних параметрів як функцій випадкових величин.

Для розв'язання задачі гомогенізації композит моделюється суцільним однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом. На поверхні контакту між матрицею та волокном виконуються умови ідеального з'єднання. У результаті виконаного дослідження отримано формулу для ефективного поздовжнього модуля пружності як функції випадкових величин. Випадковими є об'ємні частки волокна та порожнини у волокні для композита. Знайдено щільності розподілу цих випадкових величин. Пружні сталі волокна та матриці розглядаються як детерміновані величини. Отриманий вираз ефективного поздовжнього модуля пружності у вигляді функції випадкових величин дозволив визначити його характеристики – математичне сподівання та дисперсії. Отримані щільності розподілу випадкових аргументів можна застосувати для визначення інших моментів цієї випадкової величини. Запропоновану методику можна застосувати для розв'язування задачі гомогенізації композитів, фази яких мають випадкові характеристики з іншими неперервними розподілами, відмінними від нормального.

HOMOGENIZATION OF A TRANSTROPIC COMPOSITE WITH RANDOM PARAMETERS OF A HOLLOW FIBER

Spytsia O. H.

*Ph. D. in Physics and Math, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-7150-7736
spytsa.o.g@gmail.com*

Homeniuk S. I.

*D.Sc. in Engineering, Professor,
Dean of the Faculty of Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-7340-5947
gserega71@gmail.com*

Kudin O. V.

*Ph. D. in Physics and Math, Associate Professor,
Professor at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-5917-9127
avk256@gmail.com*

Stoliarova A. V.

*PhD,
Associate Professor at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0003-2783-2889
stoliarova.a.v@znu.edu.ua*

Key words: random parameters of the composite, normal distribution law, mathematical expectation, distribution density, homogenization, effective characteristics.

When designing structures made of composite materials, a composite model is used in practice as a continuous homogeneous medium. Its physical and mechanical properties as a homogeneous material reflect the effective constants. Of course, the parameters of the components of the composite are random variables. Therefore, its effective constants are also random variables. In this regard, the actual task is to homogenize the composite taking into account the stochasticity of its parameters, including the determination of the characteristics of elastic constants as random variables.

In the work, the object of research is a unidirectional fiber composite, the phases of which are a transversal-isotropic matrix and hollow fiber. The radius of the fiber and the cavity in it are modeled as random variables with a normal distribution law. Accordingly, the effective parameters of the composite are also random variables. The method of determining the mathematical expectation of an effective longitudinal modulus of elasticity, which can be used to find other numerical characteristics of effective parameters as functions of random variables, is proposed.

To solve the homogenization problem, the composite is modeled by a continuous homogeneous transversal-isotropic material. The conditions of perfect bonding are fulfilled at the contact surface between the matrix and the fiber. As result of the research, a formula was obtained for the effective longitudinal modulus of elasticity as a function of random variables. The volume fractions of the fiber and the cavity in the fiber for the composite are random. The distribution densities of these random variables are found. The elastic constants of the fiber and matrix are considered as deterministic variables. The obtained expression of the effective longitudinal modulus of elasticity as a function of random variables allowed us to determine its characteristics – mathematical expectation and variance. The obtained distribution densities of random arguments can be used to determine other moments of this random variable. The proposed method can be used to solve the problem of homogenization of composites, the phases of which have random characteristics with other continuous distributions different from the normal one.

Вступ. Розвиток сучасної техніки тісно пов'язаний з розробкою нових матеріалів. Важливе місце серед них посідають композиційні матеріали, властивості яких дозволяють створювати конструкції, оптимальні за своїми параметрами. Композити знайшли широке застосування у різних сферах машинобудування та будівництва. У зв'язку з цим виникає необхідність визначення їхніх властивостей. Щоб уникнути проведення високовартісних експериментальних досліджень виникає необхідність розробки математичних моделей композиційних матеріалів, які б дозволили визначити їхні фізико-механічні характеристики.

Задача визначення характеристик композита як однорідного матеріалу (ефективних характеристик) за відомими характеристиками його складових елементів – це задача гомогенізації композита. Під час розв'язування цієї задачі композит розглядають у вигляді трансверсально-ізотропного однорідного матеріалу.

Суттєвого розширення діапазону технічних характеристик композиційних матеріалів можна досягти, використовуючи для їх армування порожнисті волокна.

У технологічному процесі виробництва композитних матеріалів здебільшого використовуються їх компоненти, геометричні параметри яких мають певні випадкові відхилення від проектних значень. З огляду на те, що ці відхилення є результатом сукупної дії великої кількості факторів, окремий вплив кожного з яких є несуттєвим, то доцільно окремі характеристики фаз композита розглядати як випадкові величини з нормальним законом розподілу.

Стохастичність цих параметрів доцільно враховувати під час розв'язування задач гомогенізації композитів. При цьому ефективні характеристики композитів отримуємо у вигляді функцій випадкових параметрів їх компонентів, тобто вони є також випадковими величинами. Для використання цих ефективних параметрів у проектуванні конструкцій, виготовлених з композитних матеріалів, необхідно визначити числові характеристики цих випадкових величин, зокрема їх математичні сподівання.

Метою роботи є отримання формули для математичного сподівання ефективного поздовжнього модуля пружності першого роду трансропного композита з трансропними компонентами: матрицею та порожнистим волокном.

Об'єктом дослідження є односпрямований волокнистий композит, що складається з транстропних фаз, що моделюється однорідним транстропним матеріалом. Задача гомогенізації розв'язується у циліндричній системі координат (r, φ, z) . Вісь z збігається з віссю волокна, до якої є перпендикулярна площина ізоотропії волокна та композита.

До основних гіпотез, прийнятих у цьому дослідженні, належать:

- матеріали матриці і порожнистого волокна є трансверсально-ізоотропними,
- напружено-деформований стан композита моделюється лінійними рівняннями теорії пружності;
- у композиті між матрицею та волокном має місце ідеальний контакт;
- досліджується односпрямований композит з гексагональною укладкою волокон;
- стохастичними характеристиками компонентів композита є внутрішній та зовнішній радіуси порожнистого волокна, що моделюється випадковими величинами з нормальним розподілом.

У роботі вперше розв'язано визначення ймовірнісних ефективних характеристик волокнистого композита з порожнистими волокнами.

Огляд літератури та постановка проблеми. Задача гомогенізації трансверсально-ізоотропних волокнистих односпрямованих композитів з детермінованими компонентами детально розглянута у монографії [1].

У монографії [2] висвітлено широкий спектр стохастичних методів, що використовується у розв'язанні задач гомогенізації композитних матеріалів. На основі їх застосування досліджено механічні властивості різних типів композитів, зокрема волокнистих та нанокомпозитів. Розглядаються різні підходи до визначення пружних сталих за наявності дефектів у вигляді пошкоджень, тріщин, розв'язується задача гомогенізації з урахуванням наявності дифузії, впливу температурних факторів, досліджено деякі реологічні процеси у композитах. Отримані ефективні термопружні параметри для волокнистого композита, армованого волокнами різних типів.

У статті [3] отримано ефективний поперечний модуль пружності для композита з випадково розташованими односпрямованими волокнами з урахуванням взаємодії між волокнами. Також розв'язана задача гомогенізації для визначення поперечного модуля пружності композита з нестисливою матрицею та жорсткими волокнами. Стохастичний підхід до гомогенізації застосували також у роботі [4]. Тут на основі використання методу Монте-Карло дослідили міжфазні явища у волокнистих композитах. Зокрема, досліджено процес порушення з'єднання волокна та матриці.

У роботах [5–7] розглядалися задачі визначення окремих ефективних характеристик волокнистих композитів з урахуванням випадковості деяких параметрів фаз композита. Так, у [5] отримано формулу для визначення математичного спо-

дівання стохастичного ефективного поздовжнього модуля пружності для випадку, коли ці характеристики для матриці та волокна є нормально розподіленими випадковими величинами. У [6] отримано таку залежність для випадкового радіусу суцільного волокна, у [7] визначено стохастичний ефективний модуль зсуву за наявності нормального розподіленого радіусу волокна.

Об'єктом досліджень [2–7] є композиційні матеріали, армовані суцільними волокнами. Проте у багатьох конструкціях з технічних та економічних вимог доцільно використовувати композити, армовані порожнистими волокнами. Вже отримано розв'язок задачі гомогенізації композитів з порожнистими волокнами без урахування дії випадкових факторів. Розв'язання цієї задачі наведено у роботі [8]. У ній отримані аналітичні детерміновані залежності ефективних сталих трансверсально-ізоотропного односпрямованого волокнистого композита з порожнистими волокнами від пружних констант його складників та об'ємного вмісту волокна і порожнини у композиційному матеріалі.

На сьогодні нерозв'язаними залишаються задачі стохастичної гомогенізації волокнистих композитів, фазою яких є порожнисте волокно. Одна з таких задач розв'язується у цій роботі. Розроблена при цьому методика визначення співвідношень для визначення стохастичних характеристик композитів з порожнистими волокнами визначає актуальність цього дослідження.

Побудова ефективного поздовжнього модуля пружності. Для побудови математичної моделі гомогенізованого волокнистого композиту з порожнистим волокном виділимо його представницький елемент, що має транстропні властивості. Він є комбінацією двох трансверсально-ізоотропних циліндрів нескінченної довжини, що моделюють відповідно матрицю та порожнисте волокно.

Спочатку виділимо представницький елемент (елементарну комірку) гексагональної форми (рис. 1). Потім перейдемо до циліндричної комірки таким чином, щоб об'ємний вміст волокна в гексагональній комірниці й об'ємний вміст волокна в циліндричній комірниці були б однаковими.

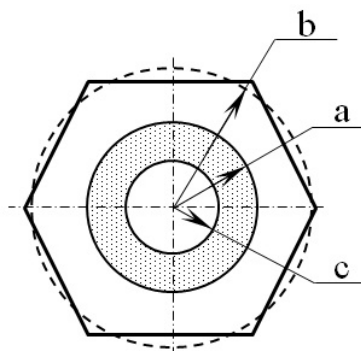


Рис. 1. Схема структури елементарної комірки

Нехай l та g відповідно об'ємний вміст волокна та порожнини в ньому у матеріалі композита. Враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку в ній займає волокно, мають однакову висоту, маємо такі співвідношення:

$$g = \frac{\pi c^2}{\pi b^2} = \frac{c^2}{b^2}, \quad h = \frac{a^2}{b^2}, \quad l = \frac{\pi(a^2 - c^2)}{\pi b^2} = \frac{a^2 - c^2}{b^2} = h - g. \quad (1)$$

Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення порожнистого циліндра ($c < r < a$), що моделює волокно, і порожнистого циліндра ($a < r < b$), що моделює матрицю.

Обмежимося випадком, коли на міжфазній поверхні композита виконуються умови ідеального контакту, тобто умови неперервності радіальних переміщень та напружень:

$$\sigma_r^\circ(a) = \sigma_r^*(a), \quad u_r^\circ(a) = u_r^*(a), \quad (2)$$

осьові переміщення для матриці та волокна співпадають, тобто $u_z^\circ(z) = u_z^*(z)$, а зовнішня поверхня матриці та внутрішня поверхня порожнистого волокна вільні від напружень:

$$\sigma_r^*(b) = 0, \quad \sigma_r^\circ(c) = 0. \quad (3)$$

Тут і далі символ $\circ$ – означає величини, що відносяться до волокна, а символ $*$ – величини, що відносяться до матриці.

Розв'язуючи вісесиметричну крайову задачу про сумісне деформування матриці та порожнистого волокна, визначаємо у них переміщення та напруження.

Далі розв'язується задача визначення компонентів напружено-деформованого стану у разі аналогічного деформування представницької комірки, виготовленої з однорідного трансропного матеріалу. Розв'язуючи цю крайову задачу, визначаємо радіальні та осьові переміщення у точках однорідного представницького елементу. Нехай σ_0° та σ_0^* – розтягувальні напруження, прикладені відповідно до волокна та матриці, σ_0 – відповідно до однорідної комірки. Матимемо однакові умови рівноваги для обох задач, якщо виконується рівність

$$\pi(a^2 - c^2)\sigma_0^\circ + \pi(b^2 - (a^2 - c^2) - c^2)\sigma_0^* = \pi b^2 \sigma_0, \quad (4)$$

$$\sigma_0^\circ(h - g) + \sigma_0^*(1 - h) = \sigma_0. \quad (5)$$

Для визначення поздовжнього модуля пружності однорідного композитного матеріалу, тобто ефективної характеристики E_1 , використаємо умови: рівність осьових переміщень та рівність радіальних переміщень на зовнішній циліндричній поверхні представницького елементу, отримані як розв'язки описаних вище крайових задач. Як показано у монографії [1], метод узгодження розв'язків крайової задачі про сумісне деформування матриці та волокна та крайової задачі про відповідне деформування представ-

ницької циліндричної комірки, виготовленої з однорідного композита, є ефективним методом гомогенізації волокнистого композита.

Використання цього підходу дає можливість отримати ефективний поздовжній модуль пружності $E_1(h, g)$:

$$E_1 = \frac{E_1^*}{\gamma} \left(\frac{(\alpha - E_2^\circ(h - g)(1 + h))(1 - h)d^\circ - (-E_2^\circ(h - g)^2(1 + h)d^* + d^*(h - g)\alpha)}{\gamma} \right), \quad (6)$$

У цьому співвідношенні

$$\alpha = (1 - h)((E_2^*v_{23}^\circ - E_2^\circ v_{23}^*)(h - g) - E_2^*(h + g)),$$

$$\gamma = d^\circ(\alpha - E_2^\circ(h - g)(1 + h)) - 2(h - g)h(v_{21}^\circ E_1^* d^\circ + v_{12}^\circ E_2^\circ d^\circ)v_{21}^*,$$

$$d^\circ = \frac{1}{E_1^\circ} + \frac{\beta}{\alpha - E_2^\circ(1 + h)(h - g)}v_{12}^\circ E_1^*,$$

$$d^* = \frac{1}{E_1^*} + \frac{\beta}{\alpha - E_2^\circ(1 + h)(h - g)}v_{12}^* E_1^\circ,$$

$$\beta = \frac{2h}{E_1^* E_1^\circ} (v_{21}^\circ E_2^*(1 - h) + v_{21}^* E_2^\circ(h - g)).$$

Тут E_1, E_2 – поздовжній та поперечний модулі пружності першого роду, v_{12}, v_{21}, v_{23} – коефіцієнти Пуассона трансропного матеріалу. Формула (6) моделює залежність поздовжнього модуля пружності E_1 для трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит, від пружних характеристик матриці, волокна й об'ємних часток волокна та порожнини.

Визначення математичного сподівання ефективного поздовжнього модуля пружності волокнистого композита за наявності випадкових параметрів волокна. Для розв'язання задачі визначення математичного сподівання ефективних характеристик композита, що є випадковими величинами за наявності стохастичних параметрів їх складників, потрібно спочатку визначити щільність сумісного розподілу цих випадкових параметрів. Розглянемо реалізацію запропонованої методики на прикладі визначення математичного сподівання ефективного поздовжнього модуля пружності волокнистого композита $E_1(h, g)$. Цей показник є функціями випадкових величин, що визначаються випадковими параметрами порожнистого волокна – його внутрішнім та зовнішнім радіусами – c та a (рис. 1):

$$h = \frac{a^2}{b^2}, \quad g = \frac{c^2}{b^2}. \quad (7)$$

На практиці лінійні розміри компонентів композита найчастіше є випадковими величинами з нормальними законами розподілу, що пояснюється тим, що відхилення від встановлених проєктних розмірів у процесі їх виготовлення виникають внаслідок впливу великої кількості незначних факторів, серед яких немає домінуючих за впливом.

Нехай радіуси $a \sim N_a(m_1; \sigma_1)$, $c \sim N_c(m_2; \sigma_2)$, де m_1 та m_2 – математичні сподівання радіусів від-

повідно a та c , σ_1 та σ_2 – середньоквадратичні відхилення, причому $\sigma_1 = \varepsilon_1 m_1$, $\sigma_2 = \varepsilon_2 m_2$, де константи ε_1 та ε_2 визначають максимальні допустимі відхилення у частках проєктних розмірів a та c . Щільності розподілу величин a та c мають вигляд:

$$f_a = \frac{1}{\varepsilon_1 m_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-m_1)^2}{2\varepsilon_1^2 m_1^2}}, f_c = \frac{1}{\varepsilon_2 m_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(c-m_2)^2}{2\varepsilon_2^2 m_2^2}}. \quad (8)$$

Знайдемо щільність розподілу випадкової величини $h = \frac{a^2}{b^2}$, що є функцією випадкової величини a , що має нормальний розподіл. Для нормально розподіленої випадкової величини областю її визначення є вся числова пряма. На ній функція $h(a)$ не є монотонною. На $(-\infty; 0)$ вона є монотонно спадною, на $(0; +\infty)$ монотонно зростає. Оскільки $h(a)$ не монотонна у своїй області визначення аргументу a , тому обернена функція $a = \psi(y)$ є неоднозначною. Розіб'ємо числову пряму на два проміжки $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$, на кожних з яких функція $h(a)$ є монотонною. На кожному з цих інтервалів монотонності знаходимо обернену функцію. На $(-\infty; 0)$ отримуємо:

$$h = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a_1 = -b\sqrt{h}.$$

$$\text{На проміжку } (0; +\infty) \quad h = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a_2 = b\sqrt{h}.$$

Оскільки $h(a)$ не монотонна у своїй області визначення, то її щільність визначається за формулою [9]:

$$f_h = f_a(a_1(h)) \cdot |a_1'(h)| + f_a(a_2(h)) \cdot |a_2'(h)|. \quad (9)$$

$$\text{Знаходимо } a_1'(h) = -\frac{b}{2\sqrt{h}}, a_2'(h) = \frac{b}{2\sqrt{h}}.$$

Для визначення щільності розподілу f_h використаємо формулу (9).

$$\begin{aligned} f_a(a_1(h)) \cdot |a_1'(h)| &= \frac{1}{\varepsilon_1 m_1 \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-b\sqrt{h}-m_1)^2}{2\varepsilon_1^2 m_1^2}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{h}} = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_1 \frac{m_1}{b} \sqrt{2\pi h}} \cdot e^{-\frac{(\sqrt{h}+\frac{m_1}{b})^2}{2\varepsilon_1^2 \frac{m_1^2}{b^2}}} = \frac{1}{2\varepsilon_1 m_h \sqrt{2\pi h}} \cdot e^{-\frac{(\sqrt{h}+m_h)^2}{2\varepsilon_1^2 m_h^2}} \\ f_a(a_2(h)) \cdot |a_2'(h)| &= \frac{1}{\varepsilon_1 m_1 \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(b\sqrt{h}-m_1)^2}{2\varepsilon_1^2 m_1^2}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{h}} = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_1 \frac{m_1}{b} \sqrt{2\pi h}} \cdot e^{-\frac{(\sqrt{h}-\frac{m_1}{b})^2}{2\varepsilon_1^2 \frac{m_1^2}{b^2}}} = \frac{1}{2\varepsilon_1 m_h \sqrt{2\pi h}} \cdot e^{-\frac{(\sqrt{h}-m_h)^2}{2\varepsilon_1^2 m_h^2}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{Тут } m_h = \frac{m_1}{b} \text{ і } h > 0.$$

Аналогічним способом отримуємо щільність розподілу випадкової величини $g(c)$:

$$f_g = \frac{1}{2\varepsilon_2 m_g \sqrt{2\pi g}} \cdot \left[e^{-\frac{(\sqrt{g}+m_g)^2}{2\varepsilon_2^2 m_g^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{g}-m_g)^2}{2\varepsilon_2^2 m_g^2}} \right], \quad (11)$$

$$\text{де } m_g = \frac{m_2}{b} \text{ і } g > 0.$$

Випадкові величини $h(a)$ та $g(c)$ є незалежними, оскільки a та c є незалежними випадковими величинами, тому сумісна щільність їх розподілу дорівнює $f_h(h) \cdot f_g(g)$.

Тому математичне сподівання ефективного параметра – поздовжнього модуля пружності, що є випадковою величиною $E_1(h, g)$, визначається за формулою [9]

$$M(E_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dh \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(h, g) f_h(h) f_g(g) dg,$$

а з урахуванням вище введених обмежень будемо мати

$$M(E_1) = \int_0^1 dh \int_0^h E_1(h, g) f_h(h) f_g(g) dg. \quad (12)$$

У технічних розрахунках доцільно використовувати значення $M(E_1)$, що сприятиме підвищенню їх точності.

Розглянемо односпрямований композит UD GFRP на основі поліефірної смоли (Polimal 109), армований скловолнами (Е-скло). Пружні характеристики складників [10]: для волокна маємо $E^0 = 73 \text{ ГПа}$, $\nu^0 = 0,22$, $G^0 = 29,9 \text{ ГПа}$; для матриці $E^* = 3,24 \text{ ГПа}$, $\nu^* = 0,385$.

На рисунках 2–3 представлено залежності математичного сподівання поздовжнього модуля пружності $M(E_1)$ від m_h у діапазоні 0,55...0,75 у разі фіксованих значень m_g та констант ε_1 та ε_2 .

Висновки. Розв'язання задачі гомогенізації волокнистих композитів за умови наявності рівномірної концентричної порожнини у волокні створює передумови для проєктування оптимальних композиційних матеріалів з точки зору їх експлуатаційних та економічних характеристик.

При цьому для створення адекватних математичних моделей гомогенізації потрібно враховувати стохастичний характер багатьох геометричних та фізико-математичних параметрів окремих складників композита. Тому ефективні характеристики композитного матеріалу є функціями цих випадкових величин. Замість задачі визначення ефективних сталей для композитів у цьому випадку приходимо до визначення ефективних характеристик випадкових величин, наприклад, їх математичних сподівань, дисперсій та інших початкових і центральних їх моментів.

У цій роботі розв'язана задача про визначення математичного сподівання ефективного поздовжнього модуля пружності транстропного односпрямованого волокнистого композита з порожнистими волокнами. При цьому випадковими величинами з нормальним законом розподілу моделювались геометричні параметри порожнистого волокна – радіуси волокна та радіуси порожнини. Аналітичний вираз для ефективного поздовжнього модуля

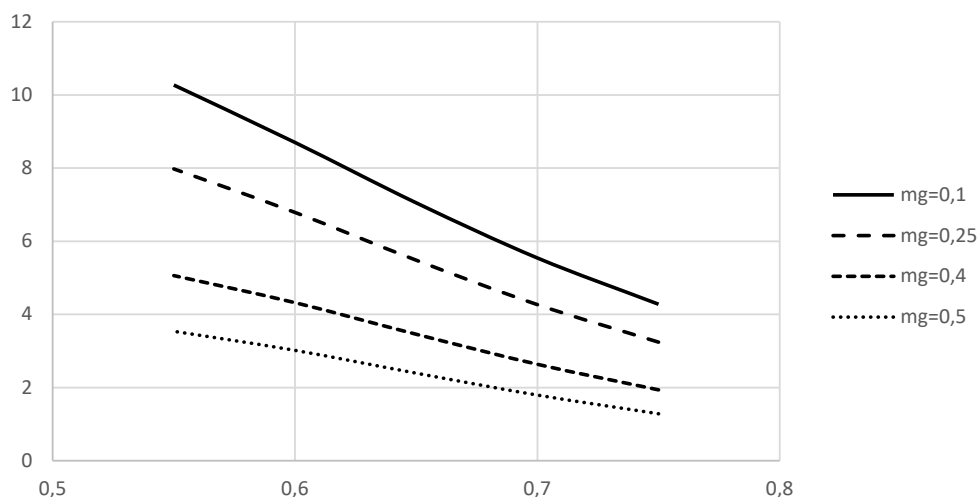


Рис. 2. Залежності математичного сподівання поздовжнього модуля пружності $M(E_1)$ від m_h за фіксованих значень m_g та $\mu = \mu_2 = 0,4$

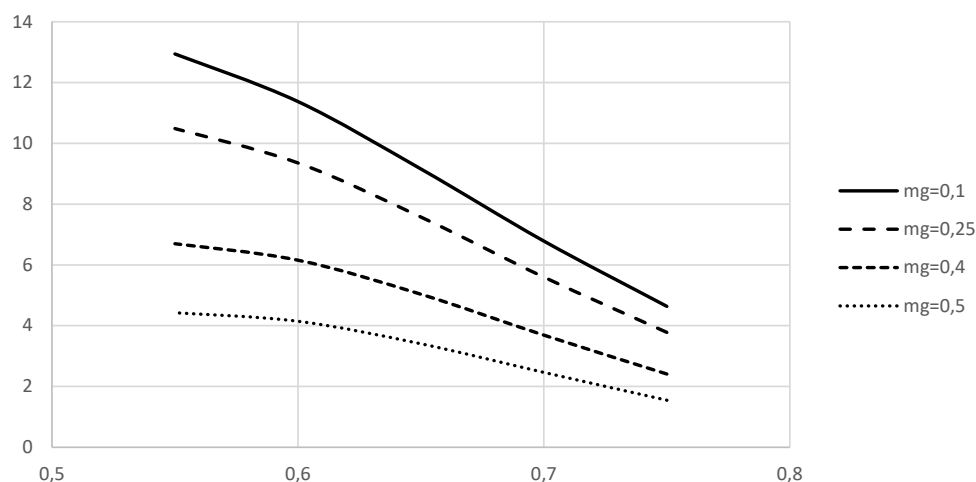


Рис. 3. Залежності математичного сподівання поздовжнього модуля пружності $M(E_1)$ від m_h за фіксованих значень m_g та $\mu = \mu_2 = 0,3$

пружності залежить від об'ємних часток волокна та порожнини у елементарній комірці. Для отримання цієї залежності використано узгодження розв'язків двох крайових задач – задачі про сумісний поздовжній розв'язок матриці та порожнистого волокна та задачі про таке ж деформування елементарної комірки з однорідного композита, механічні характеристики якого потрібно визначити. Оскільки об'ємні частки волокна та порожнини у елементарній комірці є функції випадкових параметрів, то спочатку визначаємо їх щільності розподілу. Це дає змогу отримання розв'язання задачі.

Запропонована реалізація методики визначення стохастичних характеристик ефективних параметрів композитів зі стохастичними компонентами складається з таких етапів: 1) отримання аналітичного виразу для відповідного

ефективного показника у вигляді функцій стохастичних компонентів; 2) ідентифікація розподілів цих випадкових компонентів; 3) знаходження щільності їх сумісного розподілу; 4) отримання формули для знаходження стохастичних характеристик (математичного сподівання, дисперсії, моментів) ефективного показника для композита. Цю формулу у майбутньому доцільно використовувати під час проектування конструктивних елементів, виготовлених з композитних матеріалів.

Перспективи подальших досліджень у цьому напрямі пов'язані з визначенням стохастичних характеристик ефективного поперечного модуля пружності, ефективного модуля зсуву, коефіцієнтів Пуассона транстропного композита з порожнистими волокнами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гребенюк С.М., Гоменюк С.І., Клименко М.І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.
2. Kwon Y.W., Allen D.H., Talreja R. Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures. New York : Springer, 2007. 630 p.
3. Ko Y.-F., Ju J.W. New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223. P. 2437–2458.
4. Zhong W., Pan N. A computer simulation of single fiber pull out process in a composite. *Journal of Composite Materials*. 2003. Vol. 37. № 21. P. 1951–1969.
5. Гребенюк С.М., Клименко М.І. Визначення ефективного модуля пружності композиту при нормальному розподілі модулів пружності волокна та матриці. *Вестник Херсонского национального университета*. Херсон. 2014. № 3(50). С. 254–258.
6. Hrebenuk S., Klymenko M., Omelchenko K. Effective elastic modulus determination of unidirectional composite for stochastic geometric characteristics of fiber. *Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ. 2014. № 1. С. 14–23.
7. Клименко М.І., Гребенюк С.М., Смолянкова Т.М. Визначення ефективного модуля зсуву односпрямованого композита при нормальному розподілі радіуса волокна. *Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ. 2016. № 2. С. 127–136.
8. Homeniuk S., Grebenyuk S., Klimenko M., Stoliarova A. Determining the effective characteristics of a composite with hollow fiber at longitudinal elongation. *Eastern-European Journal*. 6/7 (96). 2018, P. 6–12.
9. Білоцерківський О.В. Теорія ймовірностей і математична статистика : текст лекцій. Харків : «Друкарня Мадрид», 2016. 94 с.
10. Столярова А.В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із транстропними порожнистими волокнами : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2021. 104 с.

REFERENCES

1. Hrebenuk, S.M., Homenyuk, S.I. & Klymenko, M.I. (2019). Napruzhenno-deformovanyi stan prostorovykh konstrukttsii na osnovi homohenizatsii voloknystykh kompozytiv [Stress-strain state of spatial structures based on homogenization of fibrous composites]. Monograph. Kherson: Publishing house “Helvetica” [in Ukrainian].
2. Kwon, Y.W., Allen, D.H. & Talreja, R. (2007). Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures. New York: Springer.
3. Kwon, Y.-F., & Ju, J.W. (2012). New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*, (223), 2437–2458.
4. Zhong, W. & Pan, N. (2003). A computer simulation of single fiber pull out process in a composite. *Journal of Composite Materials*, 37(21), 1951–1969.
5. Hrebenuk, S.M. & Klymenko, M.I. (2014). Determination of composite effective elastic modulus under normal elasticity modulus distribution of fiber and matrix. *Vestnyk Khersonskoho natsionalnoho unyversytetu*, 3(50), 254–258.
6. Hrebenuk, S., Klymenko, M. & Omelchenko, K. (2014). Effective elastic modulus determination of unidirectional composite for stochastic geometric characteristics of fiber. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Matematychnе modelyuvannya i prykladna mekhanika: zbirnyk naukovykh statei. Fyzyko-matematychni nauky*, (1), 14–23.
7. Klymenko, M.I., Hrebenuk, S.M. & Smolyankova, T.N. (2016). Determination of the effective shear modulus of a unidirectional composite at normal fiber radius distribution. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Matematychnе modelyuvannya i prykladna mekhanika: zbirnyk naukovykh statei. Fyzyko-matematychni nauky*, (2), 127–136.
8. Homeniuk, S., Grebenyuk, S., Klimenko, M. & Stoliarova, A. (2018). Determining the effective characteristics of a composite with hollow fiber at longitudinal elongation. *Eastern-European Journal*, 6/7(96), 6–12.
9. Bilotserkivskiy, O.V. (2016). Teoriia ymovirnostei i matematychna statystyka [Probability theory and mathematical statistics]: tekst lekttsii. Kharkiv: «Drukarnia Madryd».
10. Stoliarova, A.V. (2021). Efektyvni mekhanichni kharakterystyky kompozytsiinykh materialiv iz transtropnymy porozhnystymy voloknamy [Effective mechanical characteristics of composite materials with transtropic hollow fibers]: monohrafiia. Kherson: Vydavnychiy dim «Helvetyka».

ЕФЕКТИВНІСТЬ МЕТОДУ ІДЕАЛЬНОЇ ТОЧКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Цегелик Г. Г.

*доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0002-4934-3181
hryhoriy.tsehelyk@gmail.com*

Цегелик М. Г.

*директор
ПП «Бінар-2000»
вул. Вербова, 39, Львів, Україна
orcid.org/0009-0004-9413-0769
M.Tsehelyk@gmail.com*

Грипинська Н. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри галузевого машинобудування та агроінженерії
Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна
orcid.org/0000-0003-0103-976X
hrypynskan@khnmu.edu.ua*

Ярецька Н. О.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань
Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна
orcid.org/0000-0002-3726-2878
yaretskano@khnmu.edu.ua*

Ключові слова: *методи прийняття рішень, багатокритеріальна оптимізація, метод ідеальної точки, ознака опуклості функцій Сільвестера, метод множників Лагранжа.*

У роботі розглянуто метод ідеальної точки, що використовується для розв'язання задач двокритеріальної оптимізації. Еперше доведено, що коли кількість змінних, від яких залежать критерії оптимізації, перевищує дві, цільова функція скаляризованої задачі втрачає опуклість. Це робить неможливим застосування методу множників Лагранжа, оскільки необхідні умови оптимальності не виконуються. Особливістю методу ідеальної точки є те, що він не потребує додаткової інформації від особи, яка приймає рішення, щодо переваги одного критерію над іншим у множині можливих альтернатив. Однак метод базується на припущенні, що існує певний оптимальний розв'язок задачі двокритеріальної оптимізації, який можна знайти шляхом її перетворення на відповідну скаляризовану однокритеріальну задачу. Основний принцип вибору компромісного рішення полягає у визначенні альтернативи, значення якої є найближчим до ідеальної точки в певній

метриці. Таким чином, метод забезпечує можливість отримання наближеного оптимального рішення без потреби у введенні додаткових вагових коефіцієнтів або суб'єктивних оцінок.

Показано, що були спроби розв'язання двокритеріальної задачі оптимізації у сфері планування виробництва продукції у випадку із чотирма змінними. Встановлено, що таку задачу не можна розв'язати методом ідеальної точки. Це пояснюється тим, що умови сідлової точки, які використовуються для перевірки оптимальності, не можуть бути застосовані через відсутність опуклості цільової функції.

Отже, метод ідеальної точки є ефективним для аналізу задач двокритеріальної оптимізації, але його застосування обмежується випадками з кількістю змінних не більше за дві. У складніших задачах із більшою кількістю змінних виникають труднощі, пов'язані з втратою опуклості цільової функції, що унеможливило використання класичних методів розв'язування.

Тому подальші дослідження будуть спрямовані на розробку підходів для пошуку альтернативних методів оптимізації (навіть у випадках неопуклих скаляризованих функцій), здатних забезпечити ефективний розв'язок для складних багатокритеріальних задач.

EFFICIENCY OF THE IDEAL POINT METHOD FOR SOLVING TWO-CRITERION OPTIMIZATION PROBLEMS

Tsegelyk H. H.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Head of the Department of Mathematical Modeling of Socio-Economic Processes
Ivan Franko Lviv National University
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/ 0000-0002-4934-3181
hryhoriy.tsehelyk@gmail.com*

Tsegelyk M. H.

*Director
Private Enterprise "Binar-2000"
Verbova str., 39, Lviv, Ukraine
orcid.org/0009-0004-9413-0769
M.Tsehelyk@gmail.com*

Hrypynska N. V.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Industrial Mechanical Engineering
and Agricultural Engineering
Khmelnyskyi National University
Instytutska str., 11, Khmelnytskyi, Ukraine
orcid.org/0000-0003-0103-976X
hrypynskan@khnmu.edu.ua*

Yarets'ka N. O.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics
and Computer Applications
Khmelnyskyi National University
Instytutska str., 11, Khmelnytskyi, Ukraine
orcid.org/0000-0002-3726-2878
yaretskano@khnmu.edu.ua*

Key words: decision-making methods, multi-criteria optimization, ideal point method, Sylvester function convexity test, Lagrange multiplier method.

The paper considers the ideal point method for solving two-criteria optimization problems. It is proven for the first time that when the number of variables on which the optimization criteria depend exceeds two, the objective function of a scalar problem loses convexity. This makes it impossible to use the Lagrange multiplier method, since the necessary optimality conditions are not met.

A feature of the ideal point method is that it does not require additional information from the decision-maker regarding the preference of one criterion over another in the set of possible alternatives. However, the method is based on the assumption that there is a certain optimal solution to the two-criteria optimization problem, which can be found by transforming it into the corresponding scalar single-criteria problem. The basic principle of choosing a compromise solution is to determine the alternative whose value is closest to the ideal point in a certain metric. Thus, the method provides the possibility of obtaining an approximate optimal solution without the need to introduce additional weighting factors or subjective estimates.

It is shown that there have been attempts to solve a two-criteria optimization problem in the field of production planning in the case of four variables. It has been established that such a problem cannot be solved using the ideal point method. This is explained by the fact that the saddle point conditions used to check optimality cannot be applied due to the lack of convexity of the objective function.

So, the ideal point method is effective for analyzing two-criteria optimization problems, but its application is limited to cases with the number of variables not exceeding two. In more complex problems with a larger number of variables, difficulties arise due to the loss of convexity of the objective function, which makes it impossible to use classical solution methods.

Therefore, further research will be aimed at developing approaches that will allow the search for alternative optimization methods (in cases of non-convex scalar functions) capable of providing an effective solution for complex multi-criteria problems.

Вступ. Математичні методи планування й оптимізації відіграють ключову роль у сучасному менеджменті, економіці та управлінні. Вони не лише сприяють зменшенню ризиків під час ухвалення рішень, але й допомагають максимізувати прибутки, знижувати витрати й ефективно розподіляти ресурси. Основою цих методів є математичне моделювання, яке дає змогу представити реальні проблеми у вигляді математичних задач, розв'язання яких забезпечує знаходження оптимальних та ефективних рішень.

Об'єктом цього дослідження є процес розв'язання задач двокритеріальної оптимізації за допомогою методу ідеальної точки.

Метою дослідження є аналіз ефективності методу ідеальної точки в розв'язанні задач двокритеріальної оптимізації та визначення його обмежень, пов'язаних із втратою опуклості цільової функції зі збільшенням кількості змінних.

Гіпотезами дослідження є те, що метод ідеальної точки дає можливість отримати компромісне рішення у двокритеріальних задачах оптимізації без потреби у введенні вагових коефіцієнтів або суб'єктивних оцінок; за умови, якщо кількість змінних у задачі перевищує дві, то скаляризована цільова функція втрачає опуклість, що унеможливує застосування методу множників Лагранжа; для випадку складних багатокритеріальних задач

(з більш ніж двома змінними) необхідні альтернативні методи оптимізації, здатні враховувати неопуклість цільової функції.

Огляд літератури. Метод ідеальної точки для розв'язування двокритеріальних задач оптимізації розглянутий в [1; 2, с. 170–173]. В [1] та в окремих публікаціях, наприклад [3], цей метод детально розглянутий у випадку двокритеріальних задач з двома змінними, адже, як буде показано в роботі, за більшої кількості змінних цільова функція скаляризованої задачі втрачає опуклість і для розв'язання таких задач методом ідеальної точки не можна використати класичний метод множників Лагранжа. Близькими роботами до цього дослідження є праці [4; 5]. У дослідженні авторів використані методи, опубліковані в праці [6, с. 247, с. 259]. Також спроба розв'язати двокритеріальну задачу оптимізації із чотирма змінними була опублікована в праці [7, с. 46–49].

Методи. У [1; 2, с. 170–173] розглядається метод ідеальної точки, який можна використати для розв'язування двокритеріальних задач оптимізації. Цей метод не використовує допоміжну інформацію від особи, яка приймає рішення, про наявність переваги одного з критеріїв на множині альтернатив. Однак робиться припущення про наявність так званого оптимального розв'язку задачі двокритеріальної оптимізації, який може бути знайдений шляхом

перетворення двокритеріальної задачі у відповідно скаляризовану однокритеріальну задачу.

Якщо на множині альтернатив M

$$\max f_1(X) = A_1, \max f_2(X) = A_2,$$

то ідеальною називається точка (A_1, A_2)

Правило вибору компромісу в цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, що має оцінку, яка є найближчою до ідеальної точки в деякій метриці.

Нами розглядається пошук компромісної альтернативи як розв'язок скаляризованої задачі

$$(f_1(X) - A_1)^2 + (f_2(X) - A_2)^2 \rightarrow \min$$

на множині альтернатив.

Наприклад, якщо розв'язувати задачу [3, с. 24–28]

$$f_1(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

$$f_2(X) = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

то ідеальною є точка $(12, 12)$ і розв'язок задачі зводиться до відшукування мінімуму функції

$$L = (2x_1 + 3x_2 - 12)^2 + (3x_1 + x_2 - 12)^2 \rightarrow \min$$

на множині альтернатив.

Покажемо, що якщо

$$f_1(X) = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3,$$

$$f_2(X) = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3,$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ будь-які числа, то цільова функція скаляризованої задачі не є опуклою.

Справді позначимо через L цільову функцію скаляризованої задачі, тоді

$$L = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - A_1)^2 + (a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - A_2)^2,$$

Знайдемо частинні похідні від функції L , одержимо:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2a_1(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - A_1) + 2a_2(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - A_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2b_1(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - A_1) + 2b_2(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - A_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2c_1(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - A_1) + 2c_2(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - A_2).$$

Тоді для частинних похідних другого порядку одержуємо значення:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2(a_1^2 + a_2^2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 2(a_1b_1 + a_2b_2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 2(a_1c_1 + a_2c_2);$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 2(a_1b_1 + a_2b_2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2(b_1^2 + b_2^2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 2(b_1c_1 + b_2c_2);$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} = 2(c_1a_1 + c_2a_2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} = 2(c_1b_1 + c_2b_2), \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = 2(c_1^2 + c_2^2).$$

Складемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

Підставляючи замість похідних їх значення, одержуємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(a_1^2 + a_2^2) & 2(a_1b_1 + a_2b_2) & 2(a_1c_1 + a_2c_2) \\ 2(b_1a_1 + b_2a_2) & 2(b_1^2 + b_2^2) & 2(b_1c_1 + b_2c_2) \\ 2(c_1a_1 + c_2a_2) & 2(c_1b_1 + c_2b_2) & 2(c_1^2 + c_2^2) \end{vmatrix}$$

Тоді

$$\Delta = 8[(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)(c_1^2 + c_2^2) + 2(a_1b_1 + a_2b_2)(a_1c_1 + a_2c_2)(b_1c_1 + b_2c_2) - (a_1^2 + a_2^2)(b_1c_1 + b_2c_2)^2 - (b_1^2 + b_2^2)(a_1c_1 + a_2c_2)^2 - (c_1^2 + c_2^2)(a_1b_1 + a_2b_2)^2].$$

Розкривши дужки і звівши подібні члени, одержуємо, що $\Delta = 0$.

Результати. Уперше проведене дослідження означає, що цільова функція L згідно з ознакою Сільвестера [4, с. 247] не є опуклою, тобто застосувати метод множників Лагранжа [4, с. 259] в цьому випадку не можна. Задачу не можна розв'язати методом ідеальної точки.

Визначник $\Delta = 0$ і тоді, коли кількість змінних функцій $f_1(X)$ та $f_2(X)$ перевищує три. Це означає, що цільова функція скаляризованої задачі в такому випадку також не є опуклою, тому застосувати метод множників Лагранжа для розв'язування таких задач не можна. Такі задачі не мають розв'язку методом ідеальної точки.

Слід зауважити, що відомі спроби розв'язати двокритеріальну задачу оптимізації з кількістю змінних, що перевищує дві. Так, наприклад, в [5, с. 46–49] розглядається двокритеріальна задача планування виробництва продукції із чотирма змінними. Цільова функція скаляризованої задачі в цьому випадку має вигляд:

$$L = (2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 190)^2 + (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 275)^2 \rightarrow \min.$$

Оскільки

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4(2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 190) + 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 275),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 6(2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 190) + 4(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 275),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2(2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 190) + 6(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 275),$$

то

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 10, \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 16, \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 10;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 16, \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 26, \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 18;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} = 10, \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} = 18, \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = 20,$$

тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 16 & 10 \\ 16 & 26 & 18 \\ 10 & 18 & 20 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 8 & 13 & 9 \\ 5 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 8(650 + 720 - 325 - 405 - 640) = 0.$$

Отже, представлена в дослідженні задача не має розв'язку. Умови сідлової точки записані, проте їх не можна використати у зв'язку з тим, що цільова функція скаляризованої задачі не є опуклою.

Висновки. Метод ідеальної точки є ефективним для аналізу задач двокритеріальної оптимі-

зації, але його застосування обмежується випадками, що передбачають не більше ніж дві змінні. У складніших задачах із більшою кількістю змінних виникатимуть труднощі, пов'язані з втратою опуклості цільової функції, що унеможливило використання класичних методів розв'язування.

Тому подальші дослідження матимуть вектор спрямування на розробку підходів для пошуку альтернативних методів оптимізації. Це стосуватиметься також випадків неопуклих скаляризованих функцій, що здатні забезпечити ефективний розв'язок для складних багатокритеріальних задач. А розв'язок таких задач є необхідним елементом підвищення ефективності управлінських рішень у багатьох галузях науки та промисловості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Волошин О. Ф., Машченко С. О. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посібник. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2010. 336 с.
2. Катренко А. В., Пасічник В. В., Пасько В. П. Теорія прийняття рішень : підручник. Київ : Видавнича група BHV, 2009. 448 с.
3. Цегелик Г. Г., Цегелик М. Г. Використання методу ідеальної точки для розв'язування задачі планування виготовлення продукції. *Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції «Соціально-економічний розвиток у контексті викликів сьогодення»*, 26.06.2024, Одеса, Україна. С. 24–28.
4. Тимофеева Н. К. Математичні моделі та підходи до розв'язання оптимізаційних задач штучного інтелекту. *Прикладні питання математичного моделювання*. № 4 (1), 2021. С. 224–230. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.24>.
5. Кирилов С. О., Кирилова Л. О., Юрій Р. Ф. Застосування роєвого та еволюційного алгоритму для вирішення дворівневих задач оптимізації. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. № 44 (1), 2024. С. 128–137. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).128-137](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).128-137).
6. Цегелик Г. Г. Математичне програмування : навчальний посібник. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. 338 с.
7. Marko M. Using the method of ideal point to solve dual-objective problem for production scheduling. *Scientific journal "ScienceRise"*. Vol. 7. No. 1(24), 2016. P. 46–49.

REFERENCES

1. Voloshyn, O.F., & Mashchenko, S.O. (2010). Modeli ta metody pryiniattia rishen: Navchalnyi posibnyk [Models and methods of decision-making: Textbook]. VPC "Kyivskyi universytet" [in Ukrainian].
2. Katrenko, A.V., Pasichnyk, V.V., & Pasko, V.P. (2009). Teoriia pryiniattia rishen: pidruchnyk [Decision-making theory: Textbook]. Vydavnycha hrupa BHV [in Ukrainian].
3. Tsehelyk, H.H., & Tsehelyk, M.H. (2024, June 26). Vykorystannia metodu idealnoi tochky dlia rozv'iazuvannia zadachi planuvannia vyhotovlennia produktsii [Application of the ideal point method for solving the production planning problem]. In Proceedings of the 2nd International Scientific and Practical Conference "Social and Economic Development in the Context of Today's Challenges" (pp. 24–28). Odesa, Ukraine [in Ukrainian].
4. Tymofeeva, N.K. (2021). Matematychni modeli ta pidkhody do rozv'iazannia optymizatsiinykh zadach shtuchnoho intelektu [Mathematical models and approaches to solving optimization problems in artificial intelligence]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*, 4 (1), 224–230 [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.24>.
5. Kyrylov, S.O., Kyrylova, L.O., & Yurii, R.F. (2024). Zastosuvannia roievoho ta evoliutsiinoho alhorytmu dlia vyrishennia dvorivnevnykh zadach optymizatsii [Application of swarm and evolutionary algorithms for solving two-level optimization problems]. *Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Seriiia "Matematyka i informatyka"*, 44 (1), 128–137 [in Ukrainian]. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).128-137](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).128-137).
6. Tsehelyk, H.H. (2011). Matematychnе prohramuвання: Navchalnyi posibnyk [Mathematical programming: Textbook]. Ivan Franko National University of Lviv [in Ukrainian].
7. Marko, M. (2016). Using the method of ideal point to solve dual-objective problem for production scheduling. *Scientific journal "ScienceRise"*, 7, 1 (24), 46–49 [in English].

РОЗДІЛ II. ІНЖЕНЕРІЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

УДК 004.75

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-09>

РОЗРОБКА ПРОТОТИПУ ДОДАТКА ВИЯВЛЕННЯ АНОМАЛІЙ ШЛЯХОМ ВІДСТЕЖЕННЯ ПОДІЙ У РОЗПОДІЛЕНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ НА ПРИКЛАДІ БАНКІВСЬКОЇ СИСТЕМИ СПОВІЩЕНЬ

Вакалюк Т. А.

*доктор педагогічних наук, професор,
завідувач кафедри інженерії програмного забезпечення
Державний університет «Житомирська політехніка»
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна
orcid.org/0000-0001-6825-4697
tetianavakaliuk@gmail.com*

Талавер О. В.

*асистент кафедри інженерії програмного забезпечення
Державний університет «Житомирська політехніка»
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна
orcid.org/0000-0002-6752-2175
olegtalaver@gmail.com*

Марцева Л. А.

*доктор педагогічних наук, доцент,
професор кафедри комп'ютерної інженерії та кібербезпеки
Державний університет «Житомирська політехніка»
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна
orcid.org/0000-0001-5037-6565
L.a.martseva@gmail.com*

Мінтій І. С.

*кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри систем автоматизованого проектування
Національний університет «Львівська політехніка»
вул. Степана Бандери, 12, Львів, Україна
orcid.org/0000-0003-3586-4311
mintii@iitlt.gov.ua*

Жиляєв Є. В.

*здобувач
Державний університет «Житомирська політехніка»
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна
orcid.org/0009-0000-4396-7826
evgenzilaev8@gmail.com*

Ключові слова: розподілені комп'ютерні системи, виявлення аномалій, аналіз першопричин, система відстеження подій, мікросервісна архітектура, Apache Kafka, Spring Cloud Sleuth, Apache Spark.

У статті представлено розробку прототипу додатка для виявлення й аналізу аномалій у розподілених комп'ютерних системах шляхом відстеження подій, реалізованого на прикладі банківської системи сповіщень. Розроблений прототип складається з двох основних модулів: модуля виявлення аномалій і модуля аналізу першопричин. Модуль виявлення аномалій здатен аналізувати дані, що генеруються системою під спостереженням через розподілену систему відстеження подій, та ідентифікувати аномальну поведінку, особливо таку, що впливає на досвід користувача. Модуль аналізу першопричин призначений для аналізу виявленої аномальної поведінки в контексті залежностей сервісу та встановлення сервісу-першопричини аномальної поведінки з урахуванням ефекту поширення аномалій. У роботі детально описано архітектуру та принципи функціонування обох модулів, їх взаємодію через систему асинхронної комунікації Apache Kafka, а також особливості реалізації алгоритмів виявлення різних типів аномалій. Особлива увага приділяється процесу виявлення помилок, порушень порогових значень та аналізу часу відгуку сервісів. Представлено інноваційний підхід до реконструкції структури залежностей аномалії на основі часових міток та ідентифікаторів трейсів, що дає змогу точно визначати першопричини проблем навіть за відсутності повної інформації про всі спени. Прототип розроблено з використанням сучасних технологій та фреймворків з відкритим кодом, зокрема Spring Cloud Sleuth для відстеження подій, Apache Kafka для асинхронної комунікації та Apache Spark для обробки даних. Архітектура системи спроектована з урахуванням можливості масштабування та легкого додавання нових алгоритмів виявлення аномалій. Прототип успішно виявляє різні типи аномалій, включно з помилками, порушенням порогових значень і аномальним часом відгуку сервісів, а також точно визначає сервіси-першопричини проблем, що дає змогу значно прискорити процес діагностики й усунення несправностей у складних розподілених системах.

DEVELOPMENT OF A PROTOTYPE APPLICATION FOR ANOMALY DETECTION BY TRACKING EVENTS IN DISTRIBUTED COMPUTER SYSTEMS ON THE EXAMPLE OF A BANKING NOTIFICATION SYSTEM

Vakaliuk T. A.

*Doctor of Pedagogical Sciences, Professor,
Head of the Department of Software Engineering
Zhytomyr Polytechnic State University
Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine
orcid.org/0000-0001-6825-4697
tetianavakaliuk@gmail.com*

Talaver O. V.

*Assistant at the Department of Software Engineering
Zhytomyr Polytechnic State University
Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine
orcid.org/0000-0002-6752-2175
olegtalaver@gmail.com*

Martseva L. A.

*Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Professor at the Department of Computer Engineering and Cybersecurity
Zhytomyr Polytechnic State University
Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5037-6565
L.a.martseva@gmail.com*

Mintiy I. S.

*PhD in Pedagogy, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Computer Aided Design Systems
Lviv Polytechnic National University
Stepan Bandera str., 12, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0003-3586-4311
mintii@iitlt.gov.ua*

Zhylyayev E. V.

*Student
Zhytomyr Polytechnic State University
Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine
orcid.org/0009-0000-4396-7826
evgenzilaev8@gmail.com*

Key words: *distributed computer systems, anomaly detection, root cause analysis, event tracking system, microservice architecture, Apache Kafka, Spring Cloud Sleuth, Apache Spark.*

The article presents the development of a prototype application for detecting and analysing anomalies in distributed computer systems by tracking events, implemented on the example of a banking notification system. The developed prototype consists of two main modules: an anomaly detection module and a root cause analysis module. The anomaly detection module can analyse data generated by the system under surveillance through the distributed event tracking system and identify anomalous behaviour, especially those that affect the user experience. The root cause analysis module is designed to analyse the detected anomalous behaviour in the context of service dependencies and identify the service root cause of the anomalous behaviour, taking into account the effect of anomaly propagation.

The paper describes in detail the architecture and principles of operation of both modules, their interaction through the Apache Kafka asynchronous communication system, and the specifics of implementing algorithms for detecting various anomalies. Particular attention is paid to detecting errors, violations of thresholds, and analysis of service response times. An innovative approach to reconstructing the structure of anomaly dependencies based on timestamps and trade identifiers is presented, allowing us to accurately determine the root causes of problems even without complete information about all spans. The prototype was developed using modern technologies and open-source frameworks, including Spring Cloud Sleuth for event tracking, Apache Kafka for asynchronous communication, and Apache Spark for data processing. The system's architecture is designed to be scalable and add new anomaly detection algorithms easily. The study's results demonstrate the proposed approach's effectiveness in detecting anomalies and determining their root causes in distributed computer systems. It accurately identifies the root cause services, which can significantly speed up diagnosing and troubleshooting complex distributed systems.

Актуальність. У сучасних умовах стрімкого розвитку розподілених комп'ютерних систем та мікросервісної архітектури особливої актуальності набуває проблема виявлення й аналізу аномалій у їх роботі. Розподілені системи стають все більш складними, що ускладнює процес моніторингу їх стану та виявлення першопричин проблем. Традиційні методи моніторингу часто виявляються неефективними через розподілений характер сучасних систем, де аномалія в роботі одного компонента може викликати каскадний ефект і призвести до збоїв у роботі інших сервісів. При цьому визначення першопричини проблеми стає нетривіальним завданням, оскільки потребує аналізу великої кількості взаємопов'язаних подій і залежностей між сервісами.

Актуальність розробки спеціалізованих інструментів для виявлення аномалій також посилюється зростаючими вимогами до якості обслуговування користувачів та необхідністю швидкого реагування на проблеми в роботі систем. При цьому важливо не лише виявляти аномалії, але й автоматично визначати їх першопричини, що дасть змогу значно скоротити час на діагностику й усунення проблем. Особливої уваги заслуговує можливість виявлення аномалій на основі даних, що надаються розподіленою системою відстеження подій, без необхідності встановлення додаткових датчиків чи модифікації наявної інфраструктури. Це робить рішення більш універсальним і легким у впровадженні для різних типів розподілених систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз наукової літератури свідчить про значну увагу дослідників до проблематики моніторингу та оптимізації роботи розподілених комп'ютерних систем. Robert Heinrich та інші [1] досліджували виклики у сфері оптимізації продуктивності мікросервісів, визначивши ключові напрями досліджень і проблеми, що потребують вирішення. Їхня робота заклала теоретичне підґрунтя для розуміння специфіки роботи з мікросервісною архітектурою.

Важливий внесок у розвиток автоматизованого тестування продуктивності мікросервісів зробили André de Camargo та співавтори [2], запропонувавши архітектуру для автоматизації тестів продуктивності. Їхнє дослідження демонструє практичні підходи до вирішення проблем моніторингу розподілених систем.

Holger Knoche [3] зосередив увагу на підтримці продуктивності під час поступової модернізації монолітного програмного забезпечення до мікросервісної архітектури. Це дослідження особливо актуальне для організацій, що здійснюють перехід до мікросервісної архітектури. Порівняльний ана-

ліз продуктивності сервісів на основі контейнерів та віртуальних машин представлений у роботі T. Salah та інших [4], що дає можливість краще розуміти особливості різних підходів до розгортання мікросервісів. У своїй попередній роботі [5] ці ж автори дослідили еволюцію розподілених систем у напрямі мікросервісної архітектури. T. Ueda, T. Nakaike та M. Ohara [6] провели характеристику робочого навантаження для мікросервісів, що дало змогу краще зрозуміти особливості їх функціонування під навантаженням.

Особливу увагу слід приділити роботам, присвяченим виявленню й аналізу аномалій. T. Pitakrat та співавтори [7] запропонували архітектурно-орієнтований підхід до ієрархічного онлайн-прогнозування збоїв. T. M. Ahmed та інші [8] досліджували ефективність інструментів управління продуктивністю додатків (APM) для виявлення регресій продуктивності. M. Mdini та співавтори [9] зосередились на моніторингу систем моніторингу мережі з використанням розпізнавання патернів для виявлення аномалій. M. Zasadzinski, V. Muntés-Mulero та M. S. Simo [10] запропонували підхід до аналізу першопричин на основі акторів у розподіленому середовищі.

Проведений аналіз літератури свідчить про активний розвиток досліджень у сфері моніторингу й аналізу аномалій у розподілених системах. При цьому особлива увага приділяється автоматизації процесів виявлення проблем та визначення їх першопричин, а також розробці масштабованих рішень для роботи з мікросервісною архітектурою.

Метою статті є розробити прототип додатка виявлення аномалій шляхом відстеження подій у розподілених комп'ютерних системах на прикладі банківської системи сповіщень.

Виклад основного матеріалу. Розробка прототипу додатка виявлення аномалій шляхом відстеження подій у розподілених комп'ютерних системах на прикладі банківської системи сповіщень передбачатиме розробку таких модулів. Модуль виявлення аномалій має бути здатним аналізувати дані, які генерує система під спостереженням, яка, зі свого боку, має розподілену систему відстеження подій, і повідомляти про аномальну поведінку, особливо таку, що має вплив на досвід користувача. Єдиним джерелом інформації при цьому має бути саме розподілена система відстеження подій. Модуль аналізу першопричини має завдання аналізувати прозвітовану аномальну поведінку в контексті залежностей сервісу, що продемонстрував таку аномальну поведінку, та, враховуючи таке явище, як поширення аномальної поведінки, встановлювати сервіс-першопри-

чину аномальної поведінки. Контекст структури залежностей сервісу також має встановлюватися лише з інформації, що надається розподіленою системою відстеження подій.

Реалізація модулю виявлення аномалій. Розглянемо насамперед виклики, з якими можемо стикнутися під час реалізації прототипу додатка виявлення аномалій шляхом відстеження подій у розподілених комп'ютерних системах на прикладі банківської системи сповіщень. Першим викликом, який потрібно вирішити, є той факт, що немає ніякої попередньої інформації про систему під спостереженням. Оскільки виявлення аномалій має працювати з будь-якою програмою, який має розподілену систему відстеження подій, єдиним попередньо доступним знанням є поведінка Spring Cloud Sleuth в контексті конкретних подій.

Наступною вимогою до системи є виявлення аномалій у режимі онлайн. Це означає, що дані мають бути класифіковані як нормальні або аномальні, як тільки вони стають доступними. Однак обчислення порогових значень прийнято виконувати перед початком виявлення аномалій.

Крім того, цей прототип обмежено використанням лише даних, що доступні з розподіленої системи відстеження подій. Досить часто використовуються апаратні датчики, наприклад, для збору інформації щодо завантаження ресурсів ЦПУ. Розроблений прототип обмежений в об'ємі доступної інформації до лише тієї, що надається Spring Cloud Sleuth. Без додаткових налаштувань це буде лише інформація про тривалість спену й інформація для виявлення відповідної служби та методу, де згадується той самий спен. Однак із використанням додаткових налаштувань для збору інформації додатково отримується інформація щодо завантаження ресурсів пам'яті JVM та середнього використання ресурсів ЦПУ в останню хвилину.

Нарешті, модуль для виявлення аномалій повинен підтримувати модульний підхід, який було встановлено під час проєктування системи. Це потребує асинхронної комунікації з розподіленою системою відстеження подій до та із системою аналізу першопричини після виявлення аномалій з використанням теми системи Kafka. Крім того, алгоритми, які використовуються для виявлення аномалій, повинні бути реалізовані таким чином, щоб декілька алгоритмів могли працювати паралельно, а додавання нового алгоритму могло бути легко здійснено.

Проведемо огляд робочого процесу виявлення аномалій. Базову концепцію реалізації системи виявлення трьох типів аномалій, описаних вище, показано на рисунку 1. Для вилучення інформації з Kafka використовується загальноживаний модуль, адже цей процес є однаковим для всіх трьох алгоритмів. Звітування про аномалію також схоже для всіх алгоритмів, у кінці інформація про всі аномалії має бути передана в той самий топик Kafka в попередньо визначеному форматі (JSON).



Рис. 1. Концепція робочого процесу виявлення аномалій

Програму має бути розроблено таким чином, щоб довільна кількість алгоритмів для виявлення аномалій могла бути встановлена та запущена паралельно. Вони можуть виявляти як ті самі, так і різні аномалії – за умови, що вони роблять це на основі даних, що стосуються спенів. Інтерпретація цих даних про аномальні спени є завданням модуля аналізу першопричини.

Перед тим, як будь-який з алгоритмів виявлення аномалій може почати індивідуальну обробку даних, програма Spark потребує доступ до даних, які були прозвітовані розподіленою системою відслідковування подій і збережені в Kafka за допомогою інструментарію Spring Cloud Sleuth. Топик містить об'єкти спенів у форматі JSON. Це є контейнером для інформації про певну кількість спенів, а також сервіс, якого вони стосуються. JSON об'єкт також поєднується з додатковою інформацією у заголовку перед ним.

Найбільш цікава інформація міститься в об'єктах спенів. Особливо тривалість та теги, що являють собою атрибути спену та використовуються алгоритмами виявлення аномалій. Ідентифікатори, ім'я та інформація про хост слугуватимуть для ідентифікації та групування запитів, які представляються відповідними спенами.

Для створення початкового потоку з вхідними даними з топіку Kafka використовується спеціальний конектор з Apache Spark Streaming, який, зі свого боку, використовується для реалізації виявлення аномалій. Після того як потік даних відкрито, він може бути змінений за допомогою операцій фільтрації та мепінгу. На першому етапі видаляється інформація заголовка, тому залишається лише JSON, який, зі свого боку, перетворюється в об'єкт спену для Spring Cloud Sleuth для полегшеної обробки.

Оскільки аномалії виявлятимуться на рівні спенів, вони мають бути отримані з листа все-

редині об'єкта спену. Після вилучення окремих спен-об'єктів вони поєднуються з відповідним об'єктом хоста як tuple (структура даних). Це робиться для збереження інформації про хост під час обробки даних алгоритмами для виявлення аномалій. Отримана структура даних використовується в потоці даних, який і обробляється алгоритмами для обчислення та маніпуляції.

Виявлення помилок виконується, як показано на рис. 2. Це процедура відсіву на входному потоці даних спенів, який надається алгоритму. Відсів здійснюється з використанням http-кодів і тегів помилок, що надаються Spring Cloud Sleuth. Ті спени, що залишаються в кінці, вважаються аномаліями.

На першому етапі відсіюються всі спени, які мають код стану, визначений як нормальний, або ж ті, що мають порожній тег помилки. У прототипі нормальним кодом стану вважається 200 (ок) та 201 (створено). Однак у разі потреби цей список можна розширити.



Рис. 2. Процес виявлення помилок

На наступному етапі відсіюються всі спени з кодом стану 404 (не знайдено). У системі цей код статусу надавався, лише якщо користувач запитував адресу, якої в системі не було. Це б призвело до збільшення кількості звітованих аномалій, якби велика кількість користувачів неправильно вводили URL-адреси. Коли ж сервіс внутрішньо надсилає запит до іншого сервісу, який не є активним, тоді код статусу буде 500 (внутрішня помилка сервера). Це робиться для розділення цих двох різних випадків. Однак цей фільтр можна видалити в разі потреби.

Наступний етап потрібен для протидії деяким наслідкам обробки винятків фреймворком. Замість того щоб зупинити процес відслідковування події на спені, на якому було повідомлено про виключення, класи для обробки винятків викликаються дещо пізніше. Це призводить до того, що інформація щодо події не обмежується конкретним спеном, але також міститиме виклики класів для обробки виключень. Щоб запобігти цим додатковим спенам, можна використати налаштування Spring Cloud Sleuth. Може статися, що виняток в одному сервісі спричинить виняток в іншому сервісі – наприклад, коли очікуваний код статусу є 200 (ок), але отриманий код є 500 (внутрішня помилка сервера). Такий виняток не буде відфільтрований, адже в нього буде окрема інформація щодо помилки. Встанов-

лення того, який із винятків є першопричиною, є завданням модуля аналізу першопричини.

Щоб позбавитися спенів, які не містять корисної інформації, останнім кроком фільтра для виявлення помилок є відсів усіх спенів із кодом стану 400 (неправильний запит) і 500 (внутрішня помилка сервера), що не мають тегу помилки. Відфільтрування таких спенів без тегу помилки не призводить до втрати інформації про жодний із винятків, але покращує звітування про аномалії, що є актуальними.

Спени, які залишаються після всіх етапів відсіву, будуть прозвітовані як аномальні і потім оброблені за допомогою модуля аналізу першопричини. Це було свідомим рішенням аналізувати спени не лише з кодом статусу 400 і 500, оскільки це дає можливість виявляти випадки, які ще не відомі, але можуть опинитися і в іншій системі. Якщо ж зосередитися лише на відомих помилках, такі нові випадки будуть просто проігноровані.

Цей модуль виявлення аномалій є досить простим. Його можна запускати в декілька копій працюючих паралельно з різними налаштуваннями. Можна також вказати, який з тегів потрібно очікувати, тобто яку саме метрику з тих, що збираються розподіленою системою відслідковування подій, необхідно порівнювати з визначеними пороговими значеннями (рис. 3).

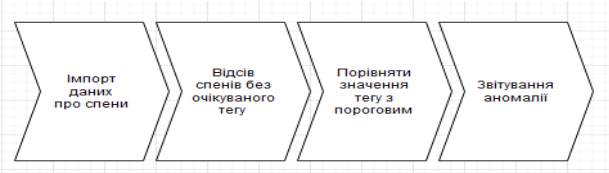


Рис. 3. Процес виявлення порушень порогових значень

Крім того, можна також визначити, чи такий тег очікується присутнім у кожному спені, чи лише в деяких. Якщо тег позначено як такий, що очікується лише на деяких спенах, першим кроком є видалення всіх спенів, на яких цього тегу немає. У випадку, якщо тег очікується на кожному спені, діапазони без тегу звітуватимуться як аномальні.

Після цього кроку відсіву значення тегу буде вилучено для порівняння його з пороговим значенням, що встановлюється попередньо. Якщо значення перевищує порогове, спен буде звітований як аномальний і спрямований для подальшої обробки за допомогою модуля аналізу першопричини.

Найскладнішим алгоритмом виявлення аномалій у цьому прототипі є алгоритм виявлення занадто високого часу відгуку. Цей алгоритм має фазу тренування для розрахування порогових і базових / очікуваних значень. Результат цієї фази

потім використовується під час фази виявлення аномалій.

Тренувальна фаза. Ця фаза потребує набору історичних даних, для чого є дуже корисним функціонал сховища Kafka. Kafka зберігає усі дані з топіку на основі визначеної політики. Коли новий клієнт починає зчитувати дані з топіку, він може вибрати отримати всі дані з топіку після моменту під'єднання клієнта. Іншим варіантом, який і використовується для тренування, є отримання всіх даних топіку.

Під час імпорту тренувальних даних програма збирає такі ідентифікатори: назва сервісу; IP-адреса та порт хоста; URL-адреса сервісу; http-метод або ж назва класу відповідного контролера. Уся ця інформація доступна за усталеним налаштуванням за допомогою Spring Cloud Sleuth. З її використанням створюється набір усіх сервісів, що повідомили про той самий спен під час тренування. Сервіси, які ніколи раніше не повідомляли про діапазон, не розпізнаються алгоритмом і не можуть спостерігатися під час наступної фази.

Наступним кроком в обробці даних є розділення його на декілька менших наборів, по одному на кожний окремий сервіс. Оскільки можна припустити, що кожен сервіс матиме різний характер поведінки, цей крок має сенс – він забезпечує основу для визначення очікуваних значень, не покладаючись на алгоритми машинного навчання для правильного групування. Це дає змогу зменшити кількість функцій на наступному етапі навчання для кожної з моделей. Для кожного з піднаборів буде розраховано окремі базові та порогові значення. Для цього прототипу лише тривалість спену включена в тренування, а включення інших показників не покращило виявлення аномалій. Для врахування факту, що набір даних для тренування сам по собі може містити аутлаєри, було виключено 0,1 % даних, які мали найбільші значення тривалості. Завдяки цьому кінцевий результат для визначення базових значень буде менш зміщений у бік екстремально великих значень. Чим менші екстремальні найбільші значення, тим менший вплив матиме цей крок на кінцеві результати. Якщо ж видалити більший відсоток даних, може бути видалено занадто велику кількість екстремальних значень, що призведе до збільшення кількості хибнопозитивних спрацювань на етапі визначення аномалій.

Після цього цей набір даних обробляється для навчання моделлю KMeans з $k = 1$ для кожного кластерного центру. Це робиться за допомогою імплементації цієї моделі від Apache Spark Mlib. Визначається єдиний кластерний центр, оскільки кожен сервіс матиме окрему модель. Кластерний

центр цієї моделі є точкою відліку для визначення аномалій. Для прототипу кластер тренуватиметься, використовуючи тривалість спенів.

Додатково до точки відліку потрібне також порогове значення. Воно являє собою дистанцію від точки відліку, що є прийнятною. Тільки якщо відстань буде вища за порогове значення, точка даних буде визначена аномальною. У кінці тренування моделі дистанція кожної з точок даних у тренувальному наборі від точки відліку буде розрахована й відповідно до цієї відстані буде надано п'ять значень: максимальна відстань; медіанна відстань; середня відстань; 95-й перцентиль відстаней; 99-й перцентиль відстаней.

Для прототипу використовується 99-й перцентиль відстаней, оскільки він показав найбільш збалансовані результати щодо виявлення аномалій і за кількістю помилкових спрацювань. Залежно від розподілу значень у тренувальному наборі даних може знадобитися інший набір критеріїв для визначення порогового значення.

Наприкінці фази тренування ми отримуємо точку відліку та порогове значення для кожного сервісу. Оскільки це вся інформація, що є необхідною для етапу визначення аномалій, не має значення, скільки даних потребується для отримання цих результатів. Як тільки дані наявні, можна розпочинати наступний етап.

Фаза виявлення. Після завершення фази тренування можна розпочинати виявлення аномалій у режимі онлайн. Головним завданням цієї фази є оцінка вхідних даних і визначення, чи відхиляються вони від очікуваної норми, чи ні.

Такий розрахунок є досить простим. Для кожного вхідного спену розраховується ідентифікатор сервісу. Потім цей ідентифікатор використовується для визначення правильної точки відліку та порогового значення. Якщо відстань між вхідним спеном і точкою відліку перевищує порогове значення, то спен вважатиметься аномальним.

Якщо вхідний спен матиме ідентифікатор сервісу, який ще не зустрічався, він буде проігнорований. Причиною цього є те, що за такого підходу формування моделі немає гарантії, що модель охоплюватиме всі сервіси. Щоб запобігти великій кількості помилкових повідомлень про аномальність даних, такі сервіси ігноруватимуться до того моменту, як для них буде створено відповідну модель. Під час наступного перерахунку моделей до них буде додано інформацію і про новий сервіс, таким чином модель може адаптуватися до мінливого середовища, навіть якщо попередні дані про систему відсутні.

У поточній реалізації прототипу потрібно перепустити всю систему, щоб оновити базові моделі

алгоритму. Однак, оскільки єдиною інформацією, яка необхідна для виявлення аномалій, є карта даних, що містить точку відліку та порогове значення для кожного сервісу, така карта даних може бути розрахована окремо і потім використана в уже запущеному алгоритмі під час його роботи.

Як тільки спен буде ідентифіковано як аномальний, про це потрібно відзвітувати і топик Kafka. Саме звідти модуль аналізу першопричини отримає дані про аномальні спени. Тому всі детектори аномалій мають використовувати спільний формат JSON і записувати дані про виявлені аномалії в той самий топик. Вибраний формат зображено на рис. 4.

```
{
  "endpointIdentifier": "service@host:port/uri::methodName",
  "spanId": "1234567890",
  "traceId": "1234567890",
  "anomalyDescriptor": "splittedKMeans",
  "begin": "100000000",
  "end": "999999999",
  "parentId": "1234567890"
}
```

Рис. 4. JSON-формат звітованих аномалій

Прозвітований JSON є спрощеним представленням спену. Він містить лише ту інформацію, що є необхідною для аналізу першопричини. Це означає, що всі теги та інформація про тривалість, які були важливі саме для виявлення аномалії, тепер видалені, оскільки аналіз першопричини знає, що всі вхідні спени є аномальними. Ідентифікатори ж зберігаються. Також додається окремий дескриптор алгоритму, оскільки та сама аномалія може бути прозвітована різними алгоритмами.

Операція зі створення екземпляра producer для Kafka є дуже дорогою, але він є необхідним для публікації даних до топіку з програми. Через це потрібно повторно використовувати producer якомога довше. У разі використання нового producer для кожного окремого аномального спену, швидкодія програми значно погіршується.

Якщо нові алгоритми, додані до системи, також зберігають вихідний формат JSON, як продемонстровано у фрагменті коду 02, їх можна легко інтегрувати в той самий робочий процес паралельно з існуючими алгоритмами, а їх результати також будуть включені в аналіз першопричини аномалії.

Реалізація модуля аналізу першопричини. Ті виклики, що були згадані в контексті модуля виявлення аномалій, також стосуються і модуля аналізу першопричини. Для цього прототипу все ще немає інформації про структуру сервісу. Аналіз першопричини також має виконуватися в режимі онлайн і базуватися лише на інформації, отриманій від розподіленої системи відслідковування

подій. Крім того, модульний підхід має продовжуватися і тут.

Особливо останній пункт є важливим для аналізу першопричини. Вхідними даними для цього етапу є звітовані аномальні спени, отримані від різних алгоритмів. Оскільки такі алгоритми можуть виконуватися паралельно один до одного, є можливість, що деякі спени були прозвітовані декілька разів різними алгоритмами, що відрізняється від підходу в модулі виявлення аномалій, де кожен спен спостерігався як унікальний.

І, нарешті, найбільшим викликом на цьому етапі є зменшення обсягу інформації, через що адміністратору потрібно буде продивлятися для розуміння першопричини аномалії. Це означає, що вихідна інформація, яка повертається на цьому етапі, має бути настільки мінімальною, наскільки це можливо, при цьому без втрати необхідної інформації, такої, що стосується самої аномалії, та ідентифікаторів сервісу, що її спричинив.

Підготовка даних. Основною метою цього кроку є зчитування даних з Kafka, вирішення проблеми дублюючих звітів на ті самі спени та надання решти даних у певному форматі для подальшої обробки.

Інформація на цьому етапі визначається форматом вихідних даних із модуля виявлення аномалій. У цьому випадку це Span ID та Trace ID; ідентифікатор сервісу, що створив спен; часова позначка початку і кінця спену; дескриптор аномалії (який налаштовується окремо); ідентифікатор батьківського елемента, якщо такий є.

Щоб об'єднати продубльовані звіти про ті самі спени, є підхід Apache Spark Streaming до обробки даних у мініпакетах даних. Адже з припущенням, що всі звіти, що стосуються того самого спену, надійдуть до системи приблизно в той самий час, вони всі будуть у тому самому мініпакеті даних. Для кожного процесу обробки всі спени групуються за своїми ідентифікаторами, після чого вони можуть бути об'єднані у єдиний звіт, об'єднавши їх дескриптори аномалії та залишаючи всю іншу інформацію, яка повторюється. У кінці цього етапу потік аномалій матиме лише один запис у топіку на кожен унікальний спен, без дублікатів. Наступний крок аналізу першопричини може припускати, що кожен аномальний спен є унікальним.

Огляд робочого процесу визначення першопричини. Початкова ситуація, ще до того, як аналіз першопричини розпочинає свою роботу, показана на рис. 6. Аномальна поведінка сервісу E спричиняє аномальні результати в сервісах A та B через поширення помилок, а тому спени із сервісів A та B також будуть ідентифіковані як аномальні, хоча поведінка самих сервісів була нормальною. Отже,

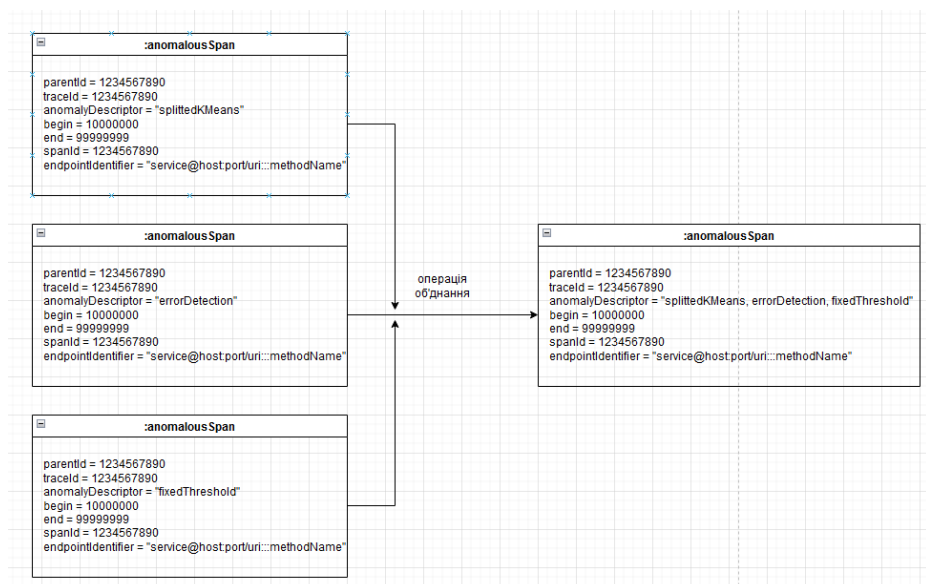


Рис. 5. Об'єднання дублікатів звітів на той самий спен

з погляду звітування про аномальну поведінку це є помилковим спрацюванням системи.

Щоб зменшити кількість таких випадків, потрібно проаналізувати контекст виникнення аномальних спенів і виділити сервіс, який є першопричиною аномальної поведінки.

Не вся доступна інформація може бути корисною для такої цілі. Наприклад, ідентифікатор спену не несе в собі ніякої корисної інформації. Будучи лише випадково згенерованим числом, він не надає жодної інформації про порядок генерації цих спенів.

Ідентифікатор сервісу та дескриптор аномалії можуть містити корисну інформацію, як тільки першопричина ідентифікована, оскільки вони надають інформацію про те, де саме в сервісі виникла аномалія. Однак до того, як сервіс-першопричину буде встановлено, користі з цієї інформації також немає.

Проте ідентифікатор трейсу містить досить корисну інформацію. Трейс є колекцією спенів, які разом становлять історію єдиного запиту. Кожен спен у межах того самого трейсу стосується того самого запиту. Це означає, що якщо виявлена аномалія має ефект поширення, це відобразиться на інших спенах у межах того самого трейсу. Тому ідентифікатор трейсу може бути використаний для групування спенів разом.

Ідентифікатор батьківського процесу може мати дуже обмежене використання в цьому випадку. У теорії ідентифікатор батьківського процесу мав би надати інформацію для виявлення відношень спенів у межах трейсу між собою. Однак проблема в тому, що це може спрацювати,

лише якщо ми маємо інформацію про весь трейс, що в цій ситуації не є гарантовано. Аналіз першопричини може лише працювати з тими спенами трейсу, які були прозвітовані на етапі виявлення аномалій. Це може бути і весь трейс, але може статися так, що деякі спени не були ідентифіковані як аномальні. При цьому ідентифікатор батьківського процесу може бути використаний, але лише як запасний варіант.

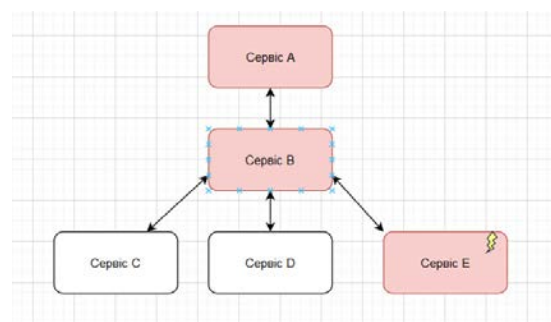


Рис. 6. Поширення аномалії – поширення аномалії з сервісу E вплинуло на поведінку сервісів A та B (заповнені червоним)

Останніми значеннями, що містяться у звіті про аномальні спени, є часові мітки, якими позначені початок і кінець спену. Вони і допоможуть нам віднайти структуру залежностей. Це можна зробити завдяки тому, як працює механізм створення спенів. Кожен із них розпочинає свою дію, лише коли запит доходить до відповідного сервісу, і завершає свою роботу, коли сервіс закінчує опрацювання запиту.

У мікросервісній архітектурі з використанням http-запитів для комунікації ці запити обро-

блюються відповідним класом-контролером (controller). Цей контролер може як опрацювати запит власноруч, так і викликати інші сервіси за допомогою інших http-запитів або ж опрацювати запит в іншому класі того самого сервісу. Незалежно від того, як саме проходить опрацювання запиту, спен уже створений, як тільки запит надійшов до сервісу, і закінчиться, як тільки запит буде оброблено. Завдяки цьому на основі інформації про часові мітки можна робити припущення щодо того, який зі спенів був першим.

Спен створюється, коли запит досягає відповідного сервісу. Ба більше, батьківський процес викликає дочірній процес. А тому і створення дочірнього процесу має бути лише після створення батьківського. Протилежне ствердження є правильним стосовно завершення роботи спену.

Однак, крім цього очікуваного порядку спенів, також було помічено два інші під час спостереження за роботою прототипу. Другий випадок, найімовірніше, є результатом роботи всіх сервісів на тій самій віртуальній машині. Через відсутність затримок через мережу можна було спостерігати спени, у яких і батьківський, і дочірній процеси мали ідентичну часову мітку початку роботи. У реальній розподіленій системі, де наявні затримки в мережі, такі випадки не повинні виникати.

Третій випадок є дуже контрінтуїтивним, якщо виходити з припущень першого випадку. Адже в процесі першого випадку є неможливим, щоб батьківський процес завершувався до того, як завершується дочірній. Однак такі випадки мали місце.

З усіма цими знаннями про структуру відносин процесів / спенів тепер можна розробити алгоритм, здатний реконструювати структуру трейсу, навіть не маючи інформації про всі спени в ньому. Для цього потрібно побудувати додаткову структуру даних, яку можна назвати просто Anomaly і яка показана на рис. 7. Вона слугує сховищем для всієї інформації щодо аномального спену та надає можливість реконструювати структуру трейсу.

Оскільки ця структура даних призначена для реструктуризації структури залежностей трейсу, підготовлені аномальні спени мають бути згруповані за їх ідентифікатором трейсу. Після чого вони мають бути впорядковані за часом початку їх роботи, що може бути зроблено завдяки сортуванню за часовою міткою початку, а потім за часовою міткою завершення роботи. Однак, якщо згадати випадок, коли вони можуть бути ідентичні на деяких спенах, це може призвести до неправильного порядку. Проте у випадку http-запитів ідентифікатор спену контролера закінчується префіксом mvc, завдяки чому їх можна відсортувати, навіть коли часові мітки є ідентичними. Але це є

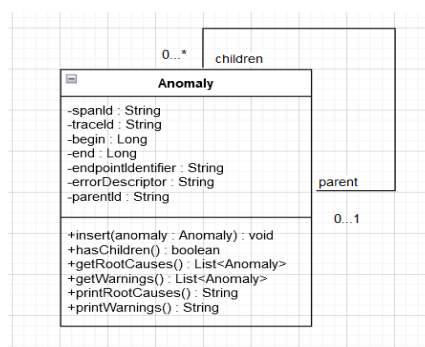


Рис. 7. UML схема класу Anomaly

слабким місцем цього алгоритму, тож покращення методу ідентифікації порядку спенів має бути пріоритетом у майбутньому.

Після такого сортування аномальні спени конвертуються в об'єкти типу нової структури даних Anomaly. Такий об'єкт, який розпочав роботу перед іншими, є головним, і всі інші об'єкти стають лише його частиною за допомогою методу insert, імплементацію якого можна побачити нижче на рисунку 8. Ця функція є рекурсивною, завдяки чому об'єкти поміщаються один в одного, згідно з їх старшинством: від найстаршого до наймолодшого.

Після того як таке «дерево» аномалій створено, метод getRootCauses() поверне список аномальних об'єктів, що є вихідними вузлами «дерева».

```

def insert(anomaly: Anomaly): Unit = {
  var inserted = false
  for (child <- children) {
    if (anomaly.parentId == this.spanId) {
      if (anomaly.begin > child.begin && anomaly.end <= child.end) {
        if (anomaly.begin >= child.begin && anomaly.end < child.end) {
          if (!inserted) {
            child.insert(anomaly)
            inserted = true
          }
        }
      }
    }
  }
  if (!inserted) {
    children.append(anomaly)
    anomaly.parent = this
  }
}
  
```

Рис. 8. Insert метод для об'єкта типу Anomaly

Це є аномалії, чий відповідні сервіси, найімовірніше, і є першопричиною аномалії. Інший же метод, getWarnings(), повертає список сервісів, які є на шляху до вузла-першопричини, які також були прозвітовані як аномальні і, вірогідно, їх аномальність була викликана лише поширенням аномалії-першопричини. Ідентифікатор сервісів-першопричин та відповідні дескриптори зберігаються для подальшого кроку – візуалізації.

Відсіювання сервісів, що не є істиною першопричиною. Під час візуалізації виконується ще один крок, який покращує надані результати аналізу першопричини аномалії. Оскільки весь процес базується на обробці мініпакетів даних, що містять усі спени одного трейсу, може бути, що інформація про

деякі з спенів відсутня, тому що вони були оброблені разом з іншим мініпакедом даних. Якщо же ці, відсутні, спени містять інформацію про першопричини, інший (неправильний) ідентифікатор сервісу може бути визначений як першопричина, що в іншому випадку був би лише результатом поширення аномалії-першопричини. А тому всі такі аномалії, про які інформація міститься в мініпакеті з уже визначеною першопричиною, мають бути деприоритизовані. Що означає, що вони мають займати нижчу позицію у звіті про першопричину аномалії.

Як можна побачити за допомогою простої візуалізації на рисунку 9, прототип здатен звітувати про виникнення помилок або ж виключень у роботі сервісу. Якщо звітується виключення, то надається назва виключення, у випадку ж помилки надається код помилки. Також в інформацію звіту додається назва сервісу, де ця помилка виникла.

На рисунку 10 показано приклад того, як прототип здатен виявляти, коли сервіс потребує занадто багато часу для обробки запиту. У прикладі візуалізації звіт сортується від найдовшого часу відгуку до найменшого. Також згадується назва сервісу та URI-адреса запиту.

Дискусія. Розроблений прототип демонструє подібність із підходом, запропонованим Т. Pitakat та співавторами [7], однак цей прототип відрізняється тим, що фокусується не лише на прогнозуванні збоїв, але й на виявленні різних типів аномалій та визначенні їх першопричин. Порівняно з позицією Т. М. Ahmed та інших [8] авторський прототип має перевагу в тому, що він не потребує

встановлення додаткових датчиків чи модифікації наявної інфраструктури.

М. Mdinі та співавтори [9] зосередилися на моніторингу систем моніторингу мережі з використанням розпізнавання патернів для виявлення аномалій. Авторський прототип доповнює цей підхід, пропонуючи не тільки виявлення аномалій, але й автоматичне визначення їх першопричин, що значно скорочує час на діагностику й усунення проблем у складних розподілених системах.

Особливо цікавим є порівняння авторського підходу з роботою М. Zasadzinski, V. Muntés-Mulero та М. S. Simo [10], де запропоновано підхід до аналізу першопричин на основі акторів у розподіленому середовищі. Авторський прототип використовує інноваційний підхід до реконструкції структури залежностей аномалії на основі часових міток та ідентифікаторів трейсів, що дає змогу точно визначати першопричини проблем навіть за відсутності повної інформації про всі спени.

Загалом розроблений прототип додатка виявлення аномалій шляхом відстеження подій у розподілених комп'ютерних системах являє собою інтеграцію різних підходів, описаних у проаналізованій літературі, з важливим рядом удосконалень.

Висновки. Дійсно, аномалії можливо виявляти на основі лише інформації, що надається розподіленою системою відслідковування подій. Реалізовані алгоритми мали змогу виявляти всі цільові аномалії, а саме помилки, порушення попередньо визначених порогових значень і занадто довгий час відгуку сервісу порівняно з очікуваним.

1	Logback Error Messages	Logback Error Messages	0	2	configurer
1	SLF4J Error Messages	SLF4J Error Messages	0	8	sms-consumer
1	BadRequest	org.springframework.web.client.HttpClientErrorException\$BadRequest	0	3	sms-consumer
1	Logback Error Messages	Logback Error Messages	0	3	sms-consumer
1	HTTP Error Code : 400	HTTP error code : 400	0	18	producer
1	HTTP Error Code : 400	HTTP error code : 400	0	21	api-gateway
1	HTTP Error Code : 400	HTTP error code : 400	0	15	in-app-consumer

Рис. 9. Виявлення помилок і виключень за допомогою прототипу

▼	12/19/22 2:13:52 PM	18,281	/status-provider/api/v2/notifications/items/...	/status-provider/api/v2/notification...	api-gateway	api-gateway-64-gbw2
▼	12/20/22 5:36:18 PM	15,786	/status-provider/api/v2/notifications/items/...	/status-provider/api/v2/notification...	api-gateway	api-gateway-64-qslbb
▼	12/19/22 4:32:50 PM	14,351	/status-provider/api/v2/notifications/items/...	/status-provider/api/v2/notification...	api-gateway	api-gateway-64-qslbb
▼	12/20/22 11:03:36 PM	6,463	-	/producer/v4/notifications/sms	matcher	matcher-29-bxpvr
▼	12/19/22 11:32:00 AM	5,308	/status-provider/api/v2/notifications/items/...	/status-provider/api/v2/notification...	api-gateway	api-gateway-64-qslbb
▼	12/19/22 11:44:43 AM	5,247	-	/producer/v4/notifications	matcher	matcher-29-bxpvr

Рис. 10. Виявлення занадто повільного часу відгуку сервісу за допомогою прототипу

Ба більше, прототип здатен реконструювати структуру залежностей аномалії, виходячи лише з інформації, яка знову ж таки, надається розподіленою системою відслідковування подій. Це дає можливість уникати помилкових звітів про аномальну поведінку та виявляти сервіс-першопричину аномальної поведінки.

Сама архітектура прототипу розроблена таким чином, щоб його можна було легко змінювати в майбутньому й адаптувати до нових викликів. Розподілена система відслідковування подій, модуль виявлення аномалій і модуль аналізу першопричину спілкуються між собою за допомогою системи асинхронної комунікації Apache Kafka. Це означає, що доки формат повідомлень між сервісами не змінюється, кожен із модулів можна замі-

нити. Крім того, структура також дає змогу запускати декілька алгоритмів паралельно один до одного. Отже, у випадку виявлення нового типу аномалій можна написати новий тип алгоритму, а потім підключити його до решти вже існуючих. Або ж, якщо існуючий алгоритм не працює так, як потрібно, його можна видалити не впливаючи на робочі процеси інших алгоритмів.

І нарешті, весь прототип та інструментарій побудовані на фреймворках з відкритим кодом і з врахуванням можливого збільшення масштабу системи. Особливо Apache Spark та Apache Kafka за своїм дизайном ідеально підходять для використання в контексті розподілених комп'ютерних систем, що дає змогу в разі потреби легко збільшувати обчислювальну потужність системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Robert Heinrich, André van Hoorn, Holger Knoche, Fei Li, Lucy Ellen Lwakatare, Claus Pahl, Stefan Schulte, and Johannes Wettinger. Performance Engineering for Microservices: Research Challenges and Directions. In *Proceedings of the 8th ACM/SPEC on International Conference on Performance Engineering Companion (ICPE '17 Companion)*. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 2017. P. 223–226. <https://doi.org/10.1145/3053600.3053653>.
2. André de Camargo, Ivan Salvadori, Ronaldo dos Santos Mello, and Frank Siqueira. An architecture to automate performance tests on microservices. In *Proceedings of the 18th International Conference on Information Integration and Web-based Applications and Services (iiWAS '16)*. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 2016. P. 422–429. <https://doi.org/10.1145/3011141.3011179>.
3. Holger Knoche. Sustaining Runtime Performance while Incrementally Modernizing Transactional Monolithic Software towards Microservices. In *Proceedings of the 7th ACM/SPEC on International Conference on Performance Engineering (ICPE '16)*. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 2016. P. 121–124. <https://doi.org/10.1145/2851553.2892039>.
4. T. Salah, M.J. Zemerly, C.Y. Yeun, M. Al-Qutayri and Y. Al-Hammadi. Performance comparison between container-based and VM-based services. *20th Conference on Innovations in Clouds, Internet and Networks (ICIN)*, Paris, France, 2017. P. 185–190. DOI: 10.1109/ICIN.2017.7899408.
5. T. Salah, M. Jamal Zemerly, Chan Yeob Yeun, M. Al-Qutayri and Y. Al-Hammadi. The evolution of distributed systems towards microservices architecture. *11th International Conference for Internet Technology and Secured Transactions (ICITST)*, Barcelona, Spain, 2016. P. 318–325. DOI: 10.1109/ICITST.2016.7856721.
6. T. Ueda, T. Nakaike and M. Ohara. Workload characterization for microservices. *IEEE International Symposium on Workload Characterization (IISWC)*, Providence, RI, USA, 2016. P. 1–10. DOI: 10.1109/IISWC.2016.7581269.
7. T. Pitakrat, D. Okanovic, A. Van Hoorn and L. Grunske. An Architecture-Aware Approach to Hierarchical Online Failure Prediction. *12th International ACM SIGSOFT Conference on Quality of Software Architectures (QoSA)*, Venice, Italy, 2016. P. 60–69. DOI: 10.1109/QoSA.2016.16.
8. T.M. Ahmed, C.-P. Bezemer, T.-H. Chen, A.E. Hassan and W. Shang. Studying the Effectiveness of Application Performance Management (APM) Tools for Detecting Performance Regressions for Web Applications: An Experience Report. *IEEE/ACM 13th Working Conference on Mining Software Repositories (MSR)*, Austin, TX, USA, 2016. P. 1–12.
9. M. Mdini, A. Blanc, G. Simon, J. Barotin and J. Lecoivre. Monitoring the network monitoring system: Anomaly Detection using pattern recognition. *IFIP/IEEE Symposium on Integrated Network and Service Management (IM)*, Lisbon, Portugal, 2017. P. 983–986. DOI: 10.23919/INM.2017.7987418.
10. M. Zasadzinski, V. Muntés-Mulero and M.S. Simo. Actor Based Root Cause Analysis in a Distributed Environment. *IEEE/ACM 3rd International Workshop on Software Engineering for Smart Cyber-Physical Systems (SEsCPS)*, Buenos Aires, Argentina, 2017. P. 14–17. DOI: 10.1109/SEsCPS.2017.3.

METHODS AND ALGORITHMS FOR ANOMALY DETECTION

Skakovskiy V. O.

*Master's Student at the Department of Software Engineering
Zhytomyr Polytechnic State University
Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine
orcid.org/0009-0001-8947-4207
vlad.sk.2003@gmail.com*

Savitskiy R. S.

*Senior Lecturer at the Department of Software Engineering
Zhytomyr Polytechnic State University
Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9804-3604
roman.savitskiy@gmail.com*

Fant M. O.

*Associate Professor at the Department of Software Engineering
Zhytomyr Polytechnic State University
Chudnivska str., 103, Zhytomyr, Ukraine
orcid.org/0000-0002-4994-8009
fantkolja@gmail.com*

Key words: *anomaly detection, outlier detection, machine learning, deep learning.*

The article examines several approaches to finding anomalies in complicated datasets, an essential task in domains including industrial monitoring, cybersecurity, banking, and healthcare. The paper evaluates the theoretical underpinnings, benefits, and drawbacks of anomaly detection strategies, classifying them into statistical approaches, clustering techniques, deep learning models, and hybrid/ensemble methods.

Although they provide theoretically solid methods for identifying outliers, statistical techniques such as Z-score analysis, Gaussian Mixture Models (GMM), and Kernel Density Estimation (KDE) have trouble handling high-dimensional and non-linear data. Whilst K-means, DBSCAN, and hierarchical clustering are popular clustering approaches for unsupervised anomaly detection, their efficacy depends on noise sensitivity and parameter choice.

Additionally, the study looks at deep learning and machine learning methods, including autoencoders, Generative Adversarial Networks (GANs), Convolutional Neural Networks (CNNs), and Long Short-Term Memory (LSTM) networks. Particularly for time-series and picture data, these models have revolutionized anomaly detection, yet their interpretability and computational efficiency present difficulties.

Furthermore, hybrid and ensemble approaches combine many techniques to increase accuracy and resilience. In challenging anomaly detection tasks, methods such as stacking ensembles, boosting, and isolation forests show improved performance. Interpretability and computational requirements are still major issues.

Many current research issues, such as explainability, model scalability, and adaptability to changing contexts, are highlighted in the article. Future research should concentrate on federated learning, explainable AI (XAI), and semi-supervised learning to ensure more transparent and effective anomaly detection models. This study lays the groundwork for future developments in the area.

МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ АНОМАЛІЙ

Скаковський В. О.

*магістр кафедри інженерії програмного забезпечення
Державний університет «Житомирська політехніка»
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна
orcid.org/0009-0001-8947-4207
vlad.sk.2003@gmail.com*

Савіцький Р. С.

*старший викладач кафедри інженерії програмного забезпечення
Державний університет «Житомирська політехніка»
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна
orcid.org/0000-0001-9804-3604
roman.savitskyi@gmail.com*

Фант М. О.

*доцент кафедри програмного забезпечення
Державний університет «Житомирська політехніка»
вул. Чуднівська, 103, Житомир, Україна
orcid.org/0000-0002-4994-8009
fantkolja@gmail.com*

Ключові слова: виявлення аномалій, виявлення викидів, машинне навчання, глибоке навчання.

У статті розглядаються кілька підходів до пошуку аномалій у складних наборах даних, що є важливим завданням у сферах промислового моніторингу, кібербезпеки, банківської справи та охорони здоров'я. У статті оцінюються теоретичні основи, переваги та недоліки стратегій виявлення аномалій, класифіковано їх на статистичні підходи, методи кластеризації, моделі глибокого навчання та гібридні / ансамблеві методи. Статистичні методи, як-от аналіз Z-показника, моделі суміші Гауса (GMM) і оцінка щільності ядра (KDE), мають проблеми з обробкою багатовимірних і нелінійних даних. Хоча K-середні, DBSCAN та ієрархічна кластеризація є популярними методами кластеризації для неконтрольованого виявлення аномалій, ефективність залежить від чутливості до шуму та параметрів.

У дослідженні розглядаються методи глибокого й машинного навчання, зокрема автокодери, генеративні змагальні (GAN), згорткові нейронні мережі (CNN) і мережі довгострокової короткочасної пам'яті (LSTM). Для часових рядів і графічних даних моделі зробили революцію у виявленні аномалій.

Гібридний і ансамблевий підходи поєднують багато методів для підвищення точності та стійкості. У складних завданнях виявлення аномалій такі методи, як утворення ансамблів, посилення й ізоляція лісів, демонструють покращену продуктивність. Інтерпретація та вимоги до обчислень усе ще залишаються головними проблемами.

У статті висвітлено багато актуальних дослідницьких питань, як-от пояснюваність, масштабованість моделі й адаптованість до мінливих контекстів. Майбутні дослідження повинні зосередитися на федеративному навчанні, пояснюваному штучному інтелекті (XAI) і напівконтрольованому навчанні. Це дослідження закладає основу для майбутніх розробок у цій сфері.

Problem statement and its connection to significant scientific and practical tasks. Anomaly detection is critical for ensuring system stability, reliability, and security, especially in financial systems, industrial IoT, and healthcare applications. Outliers, which can be considered indicative of any disturbances that can include faults, cyber threats, or fraud, are very harmful if not recognized early. For example, possible anomalies detectable by such trained systems include unusual vibrations or leaps in temperature in manufacturing, abnormal patterns of logins or transfers of massive amounts of data, and fractures of chemical formulas in the case of pharmaceuticals. They can save a significant amount of resources for businesses, save the privacy of users, prevent breaches with leaks of sensitive data, and ensure the quality of products by detecting compromised ones in case of identifying issues in time.

Traditional methods, like rule-based systems and statistical models, struggle with complex, dynamic, and high-dimensional data; instead, they are suitable for fast, shallow initial checks, but their abilities are limited for in-depth analysis of complex data sets, including time series. By bringing more sophisticated methods that can identify intricate patterns and handle massive amounts of data, machine learning has greatly improved outlier detection. Nonetheless, there are still certain issues with interpretability, scalability, and environmental adaptation. They emphasize the necessity of continual study and advancement to improve anomaly detection methods.

Addressing these challenges is essential for improving system resilience and preventing substantial disruptions. There is a critical practical and scientific task with direct applications across various industries in improving anomaly detection methods' features such as accuracy, transparency, and adaptability. Tackling difficulties is essential for researchers and practitioners, as it addresses critical needs in today's data-driven world.

Analysis of recent studies and publications. Significant progress in the discipline has been fueled by the growing complexity of contemporary datasets and the urgent need for real-time anomaly identification. Recent surveys, like Pang et al. (2021), highlight the use of AI techniques in tackling contemporary issues by classifying anomaly detection methods into statistical, clustering-based, and machine-learning approaches [1].

Statistical methods, including Gaussian Mixture Models (GMM), are widely used for anomaly detection, but their effectiveness is limited in high-dimensional or non-linear data scenarios. Wu et al. (2024) introduced a Trend and Variance Adaptive Bayesian Change-point Analysis combined with Local Outlier Scoring, effectively addressing real-world data complexities [2].

Clustering-based approaches, including density-based spatial clustering of applications with noise (DBSCAN) and k-means, remain widely applied in anomaly detection. However, modern methods like Density-Based Networks introduced by Zheng et al. (2021) address the sensitivity to parameter selection and scalability issues associated with traditional clustering techniques [3].

Machine learning, particularly deep learning, has revolutionized anomaly detection. Yang et al. (2022) highlighted the advantages of transformer-based architectures in anomaly detection by proposing a Transformer-based GAN, demonstrating its effectiveness in capturing complex time-series patterns. [4]. Chabchoub et al. (2022) enhanced the Isolation Forest algorithm with Majority Voting Isolation Forest (MVIForest), improving detection accuracy and reducing execution time [5].

Hybrid and ensemble approaches are increasingly being adopted to leverage the strengths of multiple techniques. Explainable AI (XAI) has become essential in critical domains, addressing the challenge of model interpretability. By integrating SHAP, Noorchenarboo et al. (2025) research aims to improve the interpretability of detection models, facilitating better decision-making in smart grid operations [6].

Despite these advancements, challenges persist in model adaptability, interpretability, and generalization across domains, and research is actively addressing these issues by developing interpretable models, adaptive algorithms for streaming data, and techniques for transfer learning. While significant progress has been made, continuing innovation is necessary to meet the demands of modern systems and dynamic datasets.

Formulating the goals and objectives. The main goal of this article is to provide a theoretical analysis of algorithms and machine learning models for anomaly detection. Conceptual strengths, weaknesses, and suitability for various applications should be considered. By examining the theoretical underpinnings of these techniques, this study aims to bridge existing gaps in understanding and offer insights into how these models can be optimized for specific use cases.

This research emphasizes the importance of systematically analyzing and categorizing machine learning approaches. It investigates models' assumptions, limitations, and theoretical performance in handling high-dimensional, noisy, and dynamic data environments. Particular attention is given to exploring how hybrid and ensemble approaches might theoretically combine the strengths of individual algorithms to improve overall robustness and accuracy.

The article presents a comprehensive overview of methods and algorithms commonly employed for anomaly detection. These include statistical approaches such as Z-score analysis, Gaussian Mix-

ture Models, and Kernel Density Estimation; popular clustering techniques like K-means, density-based clustering, and self-organizing maps; and advanced deep learning models, including autoencoders, Long Short-Term Memory networks, and Generative Adversarial Networks. Additionally, it explores hybrid and ensemble methods such as Isolation Forests, voting and stacking strategies, and boosting and bagging ensembles, showcasing a broad spectrum of solutions for detecting anomalies.

Within this research, the focus is extended to the interpretability of compound machine learning models, more specifically, neural networks. The investigation tries to theoretically enhance model transparency, enabling domain experts to understand the anomaly detection process. The study also attempts to elucidate how models may be integrated into dynamic environments characterized by streaming data or changing distributions. The main aim of the present study is to further expand the practitioners' knowledge of machine learning model architectures applied for anomaly detection and contribute a theoretical foundation for further studies and applications. These findings can assist in effectively guiding the composition of anomaly detection solutions that are more robust in different areas while addressing important issues, including interpretability, adaptability, and scalability.

Main research findings. The study provides a broad theoretical analysis of machine learning algorithms for anomaly detection, categorizing them into four groups: statistical approaches, clustering techniques, deep learning models, and hybrid/ensemble systems. Each category offers a distinct perspective on anomaly detection, from probabilistic assumptions to neural network power and diverse technique combinations.

Statistical methods are among the most foundational techniques for anomaly detection. They offer a mathematically grounded approach to identifying deviations from expected patterns. Statistical methods are particularly effective when data adheres to well-defined distributions or when the relationships among variables are linear and straightforward.

The Z-score method measures the number of standard deviations a data point deviates from the mean of the dataset [7]. A straightforward way to identify outliers can be provided by assigning a numerical score to each data point; typically, those exceeding a threshold (e.g., ± 3 standard deviations) can be outliers. In financial auditing, Z-score analysis can highlight unusually high transactions that deviate significantly from typical transaction values, flagging potential cases of fraud or errors. It can also be utilized in manufacturing. The Z-score method can pinpoint defects or process anomalies, such as production units with dimensions outside normal ranges.

The Z-score method has drawbacks as it assumes a normal distribution of data, a condition which, most times, does not hold true with real-life data. When analyzing skewed or non-Gaussian distributions, such constrictions can be problematic. For instance, the impact of extreme values on the mean and the standard deviation affects the accuracy of the method. Modified forms of the Z-score method that use more resilient statistics, such as the median or the median absolute deviation or MAD, can be utilized to manage it.

Gaussian Mixture Models extend the principles of Z-score analysis by modeling data as a mixture of multiple Gaussian distributions. This probabilistic approach enables GMM to capture more complex data structures, accommodating scenarios where the dataset comprises subgroups with different means and variances. For example, in customer segmentation, GMM can model the purchasing behaviors of distinct groups (e.g., regular buyers and occasional shoppers). Anomalies, in turn, are data points with low likelihoods under the fitted mixture model. This makes GMM effective in applications where data is inherently multimodal, such as biological measurements or user behavior analysis.

GMM faces challenges when applied to high-dimensional datasets. The number of parameters to estimate increases exponentially with dimensionality, leading to computational inefficiencies and potential overfitting. Regularization techniques and dimensionality reduction methods, like principal component analysis (PCA), are often employed to mitigate issues.

Statistical methods can be classified into two categories: parametric methods and non-parametric methods. For example, Z-score and GMM are considered parametric methods because they are dependent on strong assumptions about the distribution from which data is drawn. Although these assumptions facilitate the modeling problem and make these methods efficient in computation, they narrow the usability to data that fits the shape of those distribution curves.

Kernel density estimation (KDE) and histograms are widely used non-parametric methods that operate without assuming an underlying distribution [8]. For example, KDE utilizes kernel functions to smooth observed data points and estimate the probability density function. Its feature is that it offers flexibility for datasets where distributions are complex or unknown. This adaptability makes non-parametric methods particularly valuable in modern anomaly detection scenarios. However, there are challenges to deploying such models in real-time applications because these methods require substantial data to produce reliable estimates and can be computationally demanding for large-scale datasets.

Statistical methods are widely applied in domains with a clear understanding of data distributions and

interpretability. Examples include method utilization in healthcare, which identifies abnormal vital signs or lab test results based on established norms; environmental monitoring, which detects unusual weather patterns or pollution levels that deviate from historical averages.

The primary challenges of statistical approaches lie in their reliance on assumptions about data distribution and sensitivity to noise and outliers. As real-world datasets often show non-linear relationships, heavy tails, or multimodality, pure statistical methods will not be effective. In these cases, the necessity for using hybrid approaches or statistical methods with machine learning models arises for improved performance.

A promising area of exploration is a combination of statistical models with machine learning techniques, such as embedding GMMs into deep neural networks or integrating Z-score thresholds with ensemble methods. It helps to make the statistical approaches relevant in more advanced anomaly detection applications.

Clustering techniques are of significant importance in unsupervised methods of anomaly detection. These techniques leverage intrinsic patterns in the data to group points based on their similarities. In effect, they are able to organize similar data points based on natural structures, such as by making a model without providing labels or categories. Such a setup is useful for datasets where the pattern of anomalies is in stark contrast to the pattern of the regular points or where data is not labeled. Clustering methods identify anomalies as points that do not belong to any cluster or are located far from cluster centroids or dense regions.

K-means is one of the simplest and most widely used clustering algorithms. It partitions the dataset into a pre-defined number of clusters (k) by iteratively minimizing the variance within each cluster. In the context of anomaly detection, points that are far from their nearest cluster centroid are flagged as anomalies (Fig. 1).

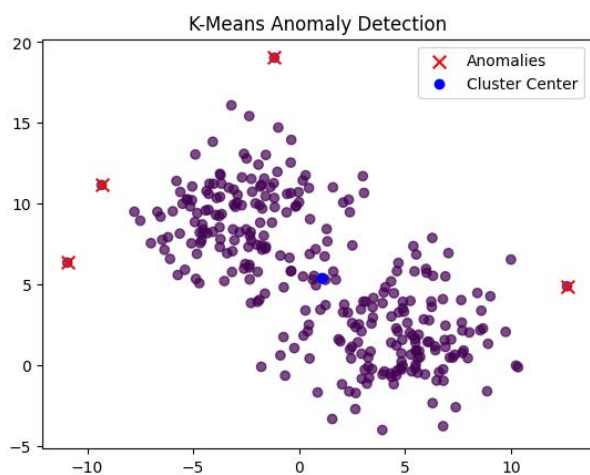


Fig. 1. K-means anomaly detection result

For example, in network traffic analysis, k-means can identify unusual data flow patterns, such as significant, infrequent file transfers that deviate from regular usage patterns. Another example is retail analytics, in which k-means can detect customers with atypical purchasing behavior that may indicate fraudulent transactions. It may look like k-means is simple and efficient, but this method has notable limitations. It assumes clusters are spherical and equally sized, which may not hold for many real-world datasets. Moreover, it is sensitive to the choice of k and initialization, which can lead to suboptimal clustering. Variants like k-means++ have been developed to improve initialization to address these issues, while other clustering techniques may be used for more complex data structures.

The density-based clustering algorithm called DBSCAN groups data points like the human eye. In essence, the algorithm identifies dense regions of data points as separated by sparser areas, and outliers, or anomalies, are defined as low-density areas that are not a part of any cluster. Clusters of different shapes and sizes improve the application in geospatial databases or industrial monitoring systems. Recent research demonstrated its utility in environmental applications, such as identifying anomalous weather patterns [9]. Compared to k-means, DBSCAN excels in detecting clusters of arbitrary shapes and automatically determining the number of clusters, making it adaptable for complex data distributions [10].

Hierarchical clustering builds a tree-like structure (dendrogram) to represent nested groupings of data points. There are two main approaches: agglomerative clustering, which starts with each data point as its cluster and merges them iteratively, and divisive clustering, which begins with all data points in a single cluster and splits them iteratively.

In anomaly detection, hierarchical clustering identifies outliers as points that either form clusters or appear at distant branches of the dendrogram. The method is particularly effective for visualizing cluster relationships and detecting anomalies in small to medium-sized datasets. The downside is the lack of a definitive stopping criterion, which complicates the process of determining the appropriate number of clusters. The method of hierarchical clustering assumes that each data point should be assigned to a cluster, and in case of a high proportion of anomalies, effectiveness declines.

Self-organizing maps (SOMs) are neural network-based methods that project high-dimensional data onto a low-dimensional grid while preserving the topological structure of the data [11]. Points that poorly fit the grid or significantly differ from their neighbors are identified as anomalies. SOMs are widely used for visualizing and analyzing complex datasets, including genomic data and financial trans-

actions. Recently, SOMs were integrated with deep learning approaches, enhancing their scalability and accuracy for detecting anomalies in large-scale and intricate datasets.

Clustering methods face several challenges in anomaly detection. As the number of dimensions increases, distance becomes less meaningful, making it harder to identify clusters or anomalies. Dimensionality reduction techniques, such as PCA or t-SNE, are often required to preprocess data. Methods like DBSCAN and k-means depend on parameter choices (e.g., k , epsilon) that significantly impact performance. Clustering methods can be sensitive to noise in the dataset, mistaking noisy data points for anomalies or distorting cluster formation.

Deep learning models represent a transformative advancement in anomaly detection, offering unparalleled capabilities in handling complex, high-dimensional, and unstructured data. These models leverage the power of artificial neural networks to learn intricate patterns and relationships within data, enabling the identification of subtle anomalies that traditional methods might overlook. The flexibility and scalability of deep learning have positioned it as a key tool for anomaly detection in diverse applications, from image and video analysis to sequential data like time series and text.

Autoencoders, a type of unsupervised neural network, excel in encoding input data into a simplified representation and subsequently reconstructing it. High reconstruction error can be associated with anomalous data instances outside the learned pattern. For instance, autoencoders can help analysts study network traffic by determining if there are some unusual data exchanges that may be an indication that an intruder is present. Autoencoders are suited to the task of working on higher-level representations of data types like images, videos, or genomic datasets. Possessing such enhanced features, the networks, in particular the variational autoencoders VAEs who specialize in probabilistic modeling, offer not only anomaly but detection but also quantifying uncertainty [12].

LSTMs, a form of recurrent neural network, are adept at capturing long-term dependencies in sequential data, making them ideal for time-series analysis to detect anomalies, such as abrupt or gradual deviations in data patterns. In contexts like IoT, LSTMs can monitor sensor outputs to detect anomalies such as unusual spikes in readings. In the financial sector, these networks are invaluable for spotting atypical trading patterns or fraudulent activities using historical data. However, LSTMs do demand significant computational resources and are particularly sensitive to the settings of their hyperparameters [13].

CNNs, primarily utilized for spatial data interpretation, have shown effectiveness in anomaly detection within visual data by extracting and analyzing hierar-

chical features. In healthcare, CNNs are instrumental in identifying anomalies like tumors from MRI scans or irregularities in X-ray images. In manufacturing, they help in inspecting product images to detect flaws such as scratches or misalignments. Extensions like 3D CNNs broaden their applicability to dynamic contexts like monitoring video feeds in surveillance or traffic systems [14].

Generative Adversarial Networks (GANs) and VAEs are generative models that have gained widespread acceptance as tools for anomaly detection [15]. In a typical GAN, there exist two networks: the first is referred to as the generative network, which generates the data, while the second is called the discriminative network, which is used to classify the data into either real or synthetic. This approach has been useful in applications like computer security, where it can be used to detect fraud or spot defects in products. VAEs use deep learning neural networks and probabilistic methods and are capable of making independence and providing reconstruction alongside uncertainty about the resulting reconstruction. They treat abnormal signals as those that are highly unlikely to exist within the distribution that is modeled.

GAN and VAE models are very effective in capturing and modeling complex data but tend to be unstable during training, requiring intricate designs and careful parameter setting. As deep learning continues to mature, its application in anomaly detection systems should also broaden, thus providing more advanced solutions to complex detection problems.

To capitalize on the advantages of both approaches, hybrid deep learning models combine deep learning architectures with conventional techniques. For instance, when combined with statistical methods like Z-score analysis, autoencoders can make anomaly detection more effective by providing interpretable scores and reconstruction errors. Similarly, temporal patterns and density-based anomalies can be examined by combining LSTMs with clustering techniques such as DBSCAN.

Hybrid approaches have proven effective in domains where data complexity and variability require multiple layers of analysis. For example, a hybrid model might combine LSTM's temporal analysis with GANs in fraud detection to simulate standard transaction patterns [16].

One of the most significant advantages of deep learning is that it excels at handling complex datasets, such as videos, images, and text, where traditional methods struggle. Also, neural networks can be tailored to specific use cases, with architectures and layers optimized for different data types and patterns. Importantly, deep learning models automatically learn relevant features, saving time and improving accuracy, unlike traditional methods that require manual feature engineering.

The feature of deep learning models is that they require high computational power by themselves to perform, which often includes not only CPUs but also GPUs and memory. This combination makes it challenging to train and deploy them. Automatic feature detection using deep learning models in a dataset can also be ineffective because they are often criticized as “black boxes”, making it difficult to explain why a particular data point is classified as anomalous.

Future research in deep learning for anomaly detection focuses on improving interpretability, reducing data requirements through semi-supervised or unsupervised learning, and enhancing the scalability of models to handle massive datasets in real-time. Advances in hybrid models and domain-specific adaptations promise to expand the applicability and effectiveness of deep learning in increasingly complex and dynamic anomaly detection scenarios.

Hybrid and ensemble methods combine the strengths of multiple machine-learning approaches to achieve more robust and accurate anomaly detection. These methods address the limitations of individual techniques by integrating diverse algorithms or combining different types of data representations, leading to improved performance, generalization, and adaptability across various domains.

Integration of clustering algorithms and neural networks is a good practice. Clustering algorithms, such as k-means or DBSCAN, can group data into clusters to identify potential anomalies, while a neural network, like an LSTM, analyzes sequential dependencies within the clusters. This approach is commonly used in time-series analysis, such as detecting anomalies in IoT sensor data or energy consumption patterns.

Hybrid models are often customized for specific applications. For instance, in healthcare, clustering methods might identify subgroups of patient records, and a generative adversarial network (GAN) could simulate normal patterns within these groups to highlight unusual cases indicative of rare diseases [17].

Ensemble methods combine multiple models to enhance accuracy, reduce overfitting, and increase robustness. The two primary strategies in ensemble learning are bagging and boosting, but their adaptations for anomaly detection take on specialized forms: isolation forests, voting and stacking, boosting-based ensembles, and bagging ensembles for diversity.

Isolation Forests continue to be an effective ensemble-based anomaly detection method, leveraging multiple decision trees to isolate data points swiftly. The isolation forests method shines in high-dimensional data contexts and maintains computational efficiency, making it a top choice for real-time applications such as fraud detection or intrusion monitoring [18].

Voting ensembles, which aggregate predictions from a blend of statistical, clustering, and deep learn-

ing models, are complemented by stacking ensembles. These utilize a meta-model to optimize prediction combinations for enhanced anomaly detection accuracy. For instance, stacking ensembles might integrate outputs from autoencoders, k-means, and Gaussian Mixture Models (GMMs) to effectively pinpoint anomalies in complex manufacturing processes [19].

Recent advancements in gradient boosting techniques like XGBoost and LightGBM have spotlighted their adaptability in anomaly detection, particularly when dealing with imbalanced datasets where anomalies are infrequent. These methods excel by iteratively refining focus on hard-to-classify instances, improving the identification of anomalies in contexts such as product quality control [20].

Bagging methods remain robust, leveraging multiple models, each trained on random data subsets to increase noise and data variability tolerance. Enhanced algorithms like Random Forests are extensively applied in structured data anomaly detection scenarios, including monitoring credit card transactions or loan applications [21].

Hybrid and ensemble methods continue to evolve, proving invaluable in overcoming individual method limitations and achieving superior anomaly detection accuracy. These methods aid in mitigating model overfitting and reducing bias towards particular algorithms or datasets. Ensemble methods like Isolation Forests demonstrate impressive scalability and effectiveness across diverse datasets and application domains. Still, hybrid and ensemble methods have challenges. Combining hybrid or ensemble systems can be computationally intensive and require significant expertise. The combination of multiple algorithms often results in harder to interpret systems, posing challenges in sensitive applications like healthcare or finance. Hybrid systems require careful tuning of parameters across different components to achieve optimal performance.

Hybrid and ensemble methods are widely used in cybersecurity, healthcare, manufacturing, and energy sectors. In cybersecurity, advanced persistent threats are detected by combining anomaly scores from clustering, statistical analysis, and neural networks. Identifying rare diseases or adverse events in healthcare can be performed by integrating patient clustering, predictive models, and statistical anomaly scoring. For manufacturing, monitoring industrial processes can involve a combination of sensor data clustering with neural network-based anomaly detection.

Enhancing automation, scalability, and interpretability is key to the future of hybrid and ensemble approaches in anomaly detection. To lessen the need for human interaction, frameworks that automatically choose and combine the best algorithms for a specific dataset are being developed. The goal of explainable AI (XAI) developments is to increase the interpreta-

bility of ensemble and hybrid systems, guaranteeing responsibility and confidence in crucial applications.

Furthermore, it is anticipated that combining hybrid techniques with cutting-edge technologies like edge computing and federated learning would increase suitability in remote and resource-constrained settings. Hybrid and ensemble approaches will continue to be essential in addressing dynamic and increasingly complicated anomaly detection problems by utilizing these developments.

Conclusions and prospects for further research.

The research was focused on theoretical approaches to some of the machine learning methods that use algorithms for the purpose of detecting anomalous events. The interest in the research is in understanding the basic ideas behind their design and construction, as well as their advantages and disadvantages. The research includes a variety of clustering, statistical, deep learning approaches, and hybrid/ensemble methods, evaluating their effectiveness across various domains and data types.

Statistical methods are used in the classification of deviations. They apply probabilistic models and outlier detection approaches to look for exceptional instances in structured datasets. Clustering algorithms provide insights into group-based anomaly detection. They show effectiveness in unstructured or spatial data scenarios, though they often demand meticulous parameter tuning. Deep learning models, such as autoencoders, LSTMs, and GANs, show good results in managing high-dimensional and complex datasets. Yet, they face challenges such as high computational demands and the necessity for large training datasets. Hybrid and ensemble methods have the advantages of multiple approaches to boost robustness and accuracy, mitigating the shortcomings of individual models and adapting effectively to dynamic and multifaceted anomaly detection tasks.

The study highlights the critical importance of choosing suitable models based on the specific properties of the data and the demands of the application domain. Statistical methods serve well for preliminary anomaly detection and quick assessment. In contrast, clustering techniques and deep learning models better detect less evident patterns. Hybrid and ensemble approaches provide a versatile solution, delivering flexibility and enhanced performance across various scenarios.

The article highlights the common issues that can be faced in the process of anomaly detection. Some of them include interpretability, scalability, and the ability to apply tired models across various domains. The theoretical findings of the topic provide a strong basis for addressing relevant problems in this area in the future, contributing to the advancement of model development, algorithm combination, and practical use.

Future research directions in anomaly detection should focus on developing methods that minimize computational demands, improve model interpretability, and adapt to changing data patterns. In this regard, there seems to be a good chance of pursuing semi-supervised and unsupervised learning approaches along with hybrid models and ensemble techniques to address the existing problems. In addition, the incorporation of emerging technologies such as federated learning and edge computing into the systems of anomaly detection may broaden their scope of application to distributed and resource-constrained environments.

This research contributes to the understanding of anomaly detection and its ability to address significant scientific and practical issues in the fields of industrial systems, cybersecurity, healthcare, and finance. As a vital tool for spotting uncommon and important events in more complicated data environments, machine learning-driven anomaly detection will continue to develop thanks to the insights gained.

REFERENCES

1. Pang, G., Shen, C., Cao, L., & Hengel, A. (2021). Deep learning for anomaly detection: A review. *ACM Computing Surveys*, 54 (1), 1–38. <https://doi.org/10.1145/3439950>.
2. Wu, H., Schafer, T.L.J., & Matteson, D.S. (2024). Trend and variance adaptive Bayesian changepoint analysis & local outlier scoring. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2011.09437>.
3. Zheng, H., Yu, X., & Li, J. (2021). Density-based neural networks for anomaly detection. *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*.
4. Yang, C., Lan, S., Huang, W., Wang, W., Liu, G., Yang, H., Ma, W., & Li, P. (2022). A transformer-based GAN for anomaly detection. *Lecture Notes in Computer Science*. https://doi.org/10.1007/978-3-031-15931-2_29.
5. Chabchoub, Y., Togbe, M., Boly, A., & Chiky, R. (2022). An in-depth study and improvement of Isolation Forest. *IEEE Access*. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3144425>.
6. Noorchenarboo, M., & Grolinger, K. (2025). Explaining deep learning-based anomaly detection in energy consumption data by focusing on contextually relevant data. *Energy and Buildings*, 328, 115177. <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2024.115177>.
7. Rashid, F., Khan, R., & Qureshi, I. (2023). A comprehensive review of the Altman Z-score model across industries. *SSRN*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.5044057>.

8. Amador Luna, D., Alonso-Chaves, F. M., & Fernández, C. (2024). Kernel density estimation for the interpretation of seismic big data in tectonics using QGIS: The Türkiye–Syria earthquakes (2023). *Remote Sensing*, 16 (20), 3849. <https://doi.org/10.3390/rs16203849>.
9. Wibisono, S., Anwar, M., Supriyanto, A., & Amin, I. (2021). Multivariate weather anomaly detection using DBSCAN clustering algorithm. *Journal of Physics: Conference Series*, 1869, 012077. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1869/1/012077>.
10. Li, Y., Wang, J., Zhao, H., Wang, C., & Shao, Q. (2024). Adaptive DBSCAN clustering and GASA optimization for underdetermined mixing matrix estimation in fault diagnosis of reciprocating compressors. *Sensors*, 24 (1), 167. <https://doi.org/10.3390/s24010167>
11. Licen, S., Astel, A., & Tsakovski, S. (2023). Self-organizing map algorithm for assessing spatial and temporal patterns of pollutants in environmental compartments: A review. *Science of The Total Environment*, 878, 163084. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2023.163084>.
12. Gorman, M., Ding, X., Maguire, L., & Coyle, D. (2023). Convolutional autoencoders for anomaly detection in semiconductor manufacturing. *IEEE AI for Cybersecurity (AICS)*, 1–6. <https://doi.org/10.1109/AICS60730.2023.10470831>.
13. Arifin, S., Wijaya, A., Nariswari, R., Yudistira, A., Suwarno, Faisal, F., & Wihardini, D. (2023). Long short-term memory (LSTM): Trends and future research potential. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, 13, 24–35. https://doi.org/10.46338/ijetae0523_04.
14. Saifullah, S., Yuwono, B., Rustamaji, H.C., Saputra, B., Dwiyanto, F.A., & Dreżewski, R. (2023). Detection of chest X-ray abnormalities using CNN based on hyperparameter optimization. *Engineering Proceedings*, 56 (1), 223. <https://doi.org/10.3390/ASEC2023-16260>.
15. Zenati, H., Foo, C.S., Lecouat, B., Manek, G., & Chandrasekhar, V.R. (2019). Efficient GAN-based anomaly detection. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.06222>.
16. Bousmina, A., Selmi, M., Rhaïem, M., & Farah, I. (2023). A hybrid approach based on GAN and CNN-LSTM for aerial activity recognition. *Remote Sensing*, 15, 3626. <https://doi.org/10.3390/rs15143626>.
17. Purandhar, N., Ayyasamy, & Poruran, S. (2022). Classification of clustered health care data analysis using generative adversarial networks (GAN). *Soft Computing*. <https://doi.org/10.1007/s00500-022-07026-7>.
18. Hariri, S., Kind, M.C., & Brunner, R.J. (2021). Extended isolation forest. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 33 (4), 1479–1489. <https://doi.org/10.1109/TKDE.2019.2947676>.
19. Lazzarini, R., Tianfield, H., & Charissis, V. (2023). A stacking ensemble of deep learning models for IoT intrusion detection. *Knowledge-Based Systems*, 279, 110941. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2023.110941>.
20. Voza, M., Polden, J., Mattera, G., Piscopo, G., Vespoli, S., & Nele, L. (2024). Explaining anomaly detection in additive manufacturing via boosting models and frequency analysis. *Mathematics*, 12, 3414. <https://doi.org/10.3390/math12213414>.
21. Schonlau, M., & Zou, R. (2020). The random forest algorithm for statistical learning. *The Stata Journal: Promoting Communications on Statistics and Stata*, 20, 3–29. <https://doi.org/10.1177/1536867X20909688>.

РОЗДІЛ III. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

УДК 004.056

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-11>

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ РИЗИКІВ КІБЕРБЕЗПЕКИ У РАЗІ ВІДСУТНОСТІ ФІНАНСОВИХ ДАНИХ ПРО ВТРАТИ

Байдур О. В.

аспірант

Національний університет біоресурсів і природокористування України

вул. Героїв Оборони, 15, Київ, Україна

orcid.org/0000-0001-7036-1264

alexvb1981@gmail.com

Ключові слова: інформаційно-комунікаційні системи військового призначення, кібербезпека, метод Монте-Карло, оцінка ризиків, час неготовності системи, кібератаки.

У статті розглянуто особливості оцінки ризиків кібербезпеки в інформаційно-комунікаційних системах військового призначення (ІКС ВП) в умовах війни, коли неможливо оцінити потенційні фінансові втрати від кібератак. Запропоновано математичну модель оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП, яка базується на методі Монте-Карло та враховує специфіку ІКС ВП, таку як особливості комбінованих атак з використанням конвекційної та кіберзброї в умовах гібридної війни, та неможливість оцінити потенційні фінансові втрати внаслідок успішних кібератак. Розроблено математичний апарат для оцінки частоти подій втрат та часу неготовності ІКС ВП внаслідок кібератак, що дозволяє врахувати невизначеність в оцінках та випадковий характер кібератак. У статті проведено детальний огляд наявних кількісних методів оцінки ризиків кібербезпеки, таких як метод Баєсових мереж, аналіз дерева атак, кількісна оцінка ризиків (QRA) та метод Монте-Карло. Показано, що метод Монте-Карло має низку переваг у контексті оцінки ризиків в ІКС ВП, таких як гнучкість, можливість врахування невизначеності, та здатність адаптуватися до динамічних змін у ландшафті загроз. Проведено аналіз можливості використання різних видів статистичних розподілів у процесі моделювання методом Монте-Карло і наведено типові сценарії їх застосування під час проведення оцінки ризиків кібербезпеки з урахуванням їх недоліків і переваг. Наведено приклади застосування розробленої моделі для різних сценаріїв кібератак на ІКС ВП, включаючи DDoS-атаки, фішингові атаки, атаки програм-вимагачів та АРТ-атаки. Запропонований підхід може бути використаний для прийняття рішень щодо розподілу ресурсів на кіберзахист ІКС ВП в умовах війни. Подальші дослідження дозволять автоматизувати оцінку ризиків в ІКС ВП, що дозволить здійснювати моделювання загроз у реальному часі і швидко розробляти пакети контрзаходів, які значно підвищать стійкість ІКС ВП в умовах ведення агресивної війни в кіберпросторі.

MATHEMATICAL MODEL FOR CYBERSECURITY RISK ASSESSMENT IN THE ABSENCE OF FINANCIAL DATA ON LOSSES

Baidur O. V.

Postgraduate Student

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

Heroiv Oborony str., 15, Kyiv, Ukraine

orcid.org/0000-0001-7036-1264

alexvb1981@gmail.com

Key words: *military information and communication systems, cybersecurity, Monte Carlo method, risk assessment, system downtime, cyberattacks.*

This article examines the specifics of cybersecurity risk assessment in military information and communication systems (MICS) in wartime conditions, where it is impossible to assess potential financial losses from cyberattacks. A mathematical model for cybersecurity risk assessment in MICS is proposed, based on the Monte Carlo method and considering the specifics of MICS, such as the peculiarities of combined attacks using conventional and cyber weapons in hybrid warfare, and the impossibility of assessing potential financial losses resulting from successful cyberattacks. A mathematical apparatus has been developed to assess the frequency of loss events and system downtime of MICS due to cyberattacks, which allows accounting for uncertainty in estimates and the random nature of cyberattacks. The article provides a detailed review of existing quantitative methods for cybersecurity risk assessment, such as the Bayesian network method, attack tree analysis, quantitative risk assessment (QRA), and the Monte Carlo method. It is shown that the Monte Carlo method has several advantages in the context of risk assessment in MICS, such as flexibility, the ability to account for uncertainty, and the ability to adapt to dynamic changes in the threat landscape. An analysis of the possibility of using various types of statistical distributions in the Monte Carlo simulation process is conducted, and typical scenarios for their application during cybersecurity risk assessment are presented, considering their advantages and disadvantages. Examples of applying the developed model to various scenarios of cyberattacks on MICS are provided, including DDoS attacks, phishing attacks, ransomware attacks, and APT attacks. The proposed approach can be used to make decisions regarding the allocation of resources for the cybersecurity of MICS in wartime. Further research will allow automating risk assessment in MICS, which will enable real-time threat modeling and rapid development of countermeasures, which will significantly increase the resilience of MICS in the context of aggressive warfare in cyberspace.

Вступ. Безперервні та багатовекторні кібератаки, що здійснюються з 2022 року російською федерацією на інформаційно-комунікаційні системи військового призначення (ІКС ВП) України, змушують переглядати усталені підходи до оцінки ризиків кібербезпеки, актуальні для мирного часу. Як було зазначено в [1; 2], якісні методології оцінки ризиків кібербезпеки, що спираються на суто експертну оцінку, не можуть бути повноцінно застосовані у разі оцінки ризиків ІКС ВП України у зв'язку з унікальністю поточної ситуації та відсутністю відповідного досвіду у експертів. Насамперед ситуацію вирізняють майже щоденні спроби вмотивованих російською федерацією кіберзлочинців здійснити вплив на ІКС ВП України, що дозволило накопичити дані щодо розподілу зусиль та частоти дій кіберзло-

чинців у статистично значущих кількостях. Також протидія такій високій інтенсивності кібератак потребує швидкої адаптації захисту системи до змін ландшафту у кіберпросторі, що своєю чергою створює запит на перегляд ризиків кібербезпеки буквально у режимі реального часу. Все це створює сприятливі умови для застосування саме кількісних методологій і відповідних методів математичної статистики під час оцінки ризиків кібербезпеки ІКС ВП. При цьому слід врахувати, що в умовах ведення війни і інтеграції кібератак у загальну військову стратегію неможливо правильно оцінити потенційний негативний економічний ефект від кібератаки ворога, що досягне часткового або повного успіху. У попередньо проведеному огляді сучасних методологій оцінки ризиків кібербезпеки [2] було виявлено, що попу-

лярні кількісні методології не дозволяють задовільнити потреби в оцінці ризиків кібербезпеки ІКС ВП в умовах ведення бойових дій. У цих умовах недоліком розглянутих кількісних методологій є те, що вони орієнтовані на оцінку негативного економічного ефекту внаслідок успішної кібератаки з метою підтримки прийняття рішення щодо розподілу наявного фінансового ресурсу на організацію ефективного кіберзахисту системи. Тому постає завдання адаптувати математичний апарат методики оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП таким чином, щоб чинником, який впливає на прийняття рішення з розподілу фінансового ресурсу на організацію кіберзахисту системи, були не потенційний негативний економічний ефект, а інший показник, наприклад, потенційний час неготовності системи, як це було запропоновано у згаданому огляді. Проведений огляд також дозволив описати алгоритм оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП (скорочено АОРІКС-В), що задовольняє озвученим вище вимогам, і тепер постає завдання на основі цього алгоритму сформувати відповідний математичний апарат.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Останні огляди методів оцінки ризиків кібербезпеки [3; 4; 5] виділяють чотири основних підходи до створення математичних моделей, до яких можна віднести використання методів на основі Баєсових мереж [6], аналізу дерева атак [7], Кількісної оцінки ризиків (QRA) [8] та Монте-Карло [9]. Вибір конкретного методу залежить від основного завдання оцінки ризиків та залежить від кінцевої мети, що має бути досягнута в результаті проведеного аналізу. Стаття [6] присвячена огляду методу аналізу на основі Байєсових мереж, автори методу акцентують увагу на порівнянні з методом Монте-Карло, що пропонується в методології FAIR [10], і вони доходять висновку, що створена ними модель з використанням Баєсових мереж видає результати, подібні до використання методу Монте-Карло у загальних випадках, однак методика на основі Баєсових мереж досягає вищої точності у випадках, коли розподіли мають довгий хвіст або коли частота події втрат та величина втрат мають розподіли, відмінні від трикутних, які використовуються в традиційній моделі FAIR. Наприклад, частота події втрат може слідувати логнормальному розподілу або розподілу Вейбулла, а величина втрат може слідувати гамма-розподілу. Огляд методів аналізу дерева атак [7] розкриває основні переваги цього методу, до яких можна віднести насамперед їх наочність, позаяк вони дають чітке візуальне уявлення про потенційні загрози та їх взаємозв'язки та можливість визначити найбільш критичні загрози і зосередити ресурси на їх усуненні. При цьому слід відзначити, що дерева атак можуть бути суб'єктив-

ними та залежати від знань та досвіду експертів, неефективними для аналізу складних систем з великою кількістю взаємопов'язаних компонентів і не враховувати динамічних змін у загрозах та вразливостях. Описаний у роботі [8] метод кількісної оцінки ризиків (QRA) використовує аналіз сценаріїв ризику для визначення ймовірності та впливу небажаних подій. При цьому QRA враховує широкий спектр факторів, включаючи загрози, вразливості та вплив та надає структурований процес для оцінки ризиків, що забезпечує послідовність та повноту. Головними недоліками QRA є суб'єктивність, яка пов'язана з тим, що метод спирається на експертні судження та його обмеженість доступністю даних, особливо для нових або незвичайних загроз. Популярна методологія FAIR [10], яка є основою деяких стандартів оцінки ризиків кібербезпеки [11], як математичний інструмент використовує метод Монте-Карло, який має здатність обробляти складні системи і залежності та дає можливість враховувати невизначеність та випадковість, але при цьому потребує великої кількості даних для точних результатів і може бути складним у реалізації та інтерпретації.

Мета статті – розробка математичного апарату оцінки ризиків кібербезпеки в інформаційно-комунікаційних системах військового призначення з послідовністю кроків, описаною в алгоритмі оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП [2]. При цьому має бути враховано специфіку ІКС ВП, особливості гібридної війни, неможливість оцінити потенційні фінансові втрати внаслідок успішних кібератак.

Вибір методу оцінки ризиків в ІКС ВП.

Обґрунтування вибору методу почнемо з проведення порівняльного аналізу перерахованих вище чотирьох методів кількісної оцінки ризиків кібербезпеки, а саме методів Баєсових мереж, аналізу дерева атак, кількісної оцінки ризиків (QRA) та Монте-Карло в контексті їх потенційного застосування під час оцінки ризиків в ІКС ВП.

Перший метод для розгляду метод Баєсових мереж. Автори роботи [6] розглядають його як послідовність дій, яка описана в методології FAIR. Вони зазначають, що оцінка ризику за допомогою моделі FAIR включає дві процедури, що потребують застосування апарату математичної статистики, це оцінка частоти подій втрат та агрегування величин втрат з використанням оцінених частот для обчислення загального збитку [6]. На першому кроці процедури оцінки частоти подій втрат у цій роботі пропонується здійснити розбудову Баєсової мережі, яка є орієнтованим ациклічним графом та являє собою факторизацію спільного розподілу ймовірностей і складається з вузлів (представляють змінні) та дуг (представ-

ляють причинно-наслідкові ймовірнісні зв'язки з ймовірнісними вагами, змодельованими за допомогою статистичних детермінованих функцій). У Баєсовій мережі кожен вузол має пов'язану таблицю ймовірностей $P(X_i \vee pa(X_i))$, яка називається таблицею умовної ймовірності змінних X_i з урахуванням його батьківських змінних $pa(X_i)$ та визначає ймовірність кожного стану вузла за умови всіх можливих комбінацій станів його батьківських вузлів [13]. При цьому для кожного вузла X_i без батьків таблиця являє собою граничний розподіл ймовірностей $X_i, P(X_i)$. Якщо умовно зважити зв'язок між змінними незалежними у Баєсовій мережі, то слабкі зв'язки можна представити відсутністю дуг та значно спростити спільний розподіл ймовірностей, представивши його за допомогою добутку. Крім того, можна отримати граничний розподіл дочірньої змінної шляхом маргіналізації її батьківських змінних у спільному розподілі. Ці припущення дозволили авторам роботи [6] вивести таку формулу об'єднаного розподілу в Баєсовій мережі:

$$P(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \vee pa(X_i)), \quad (1)$$

де $P(X_i)$ – граничний розподіл ймовірностей, n – будь-яке число від 0 до верхньої межі N , а $P(X_i \vee pa(X_i))$ – таблиця умовної ймовірності змінних X_i з урахуванням його батьківських змінних $pa(X_i)$.

При цьому розрахунок розподілу втрат L_p відбувається за припущення, що за певний період подія втрат може статися n разів, де n – будь-яке число від 0 до верхньої межі N , ця подія має фіксований розподіл величини втрат LM_p . За цих припущень основний розподіл можна обчислити за допомогою n -кратної згортки:

$$L_p = P(0)LP_0 + P(1)LP_1 + \dots + P(N)LP_N, \quad (2)$$

де LP_n – n -кратний розподіл величини втрат LM_p , $LP_0 = 0, aLP_n = LP_{n-1} + LM_p$ для n від 1 до N та $P(n)$, що є ймовірністю для частоти події втрат $F_p = n$.

Такий підхід дозволяє гнучко використовувати різні розподіли для описання подій втрат і підбирати з них той, що найкраще описує реальний стан речей.

Загальні втрати L_T описуються шляхом агрегування ризиків та їх агрегованої частоти:

$$L_T = RA_2(F_{p \cup s}, LM_p, LM_s), \quad (3)$$

де $F_{p \cup s}$ – агрегована частота втрат, а LM_p та LM_s – величини втрат.

Автори роботи [6] пропонують спростити цю залежність до формули n -кратної згортки:

$$L_T = \sum_{n=0}^N \left[\sum_{m=0}^n P(F_p, F_s) \times (LP_n + LS_m) \right], \quad (4)$$

де LP_n – n -кратний розподіл величини втрат LM_p , $LP_0 = 0, aLP_n = LP_{n-1} + LM_p$ для n від 1 до N та $P(n)$, що є ймовірністю для частоти події втрат $F_p = n$, LS_n – n -кратний розподіл величини втрат LM_s , де $LS_0 = 0, aLS_m = LS_{m-1} + LM_s$ для m від 1 до n та $P(n)$, а функція $P(F_p, F_s)$ є об'єднаною частотою втрат для подій n та m з ймовірністю $F_p = n$ та $F_s = m$.

Загальний вигляд Баєсової мережі для агрегації ризиків представлений на рис. 1 [6]. Наведені Баєсові мережі моделюють статичні зв'язки між подіями, при цьому адаптацію моделі пропонується проводити шляхом розширення та/або заміни вузлів у побудованій мережі, щоб забезпечити більшу гнучкість.

Підсумовуючи сказане по методу Баєсових мереж, слід зазначити, що в контексті завдання оцінки ризиків в ІКС ВП переваги методу пов'язані із можливістю використання різних розподілів для описання частоти подій втрат і нівелюються статичністю зв'язків у побудованій моделі, де адаптація під нові виявлені залежності вимагає зусиль експертів – людей, пов'язаних із перебудовою Баєсової мережі та її адаптацією. Ці зусилля значно ускладнюють використання моделі, що в умовах високої інтенсивності кібератак на ІКС-ВП може призвести до необґрунтованого навантаження на залучених експертів, яке пов'язане із необхідністю постійної адаптації моделі.

Наступний метод, а саме метод аналізу дерева атак, детально описаний у роботі [7]. Цей метод передбачає створення деревоподібної структури, яка відображає можливі шляхи атаки на систему. Послідовність дій сторони, що атакує, описується за допомогою ланцюга знищення, розробленого компанією Lockheed Matrin [12]. Кількісні показники оцінюються за допомогою матриці оцінки ризиків – візуального інструменту, який відображає потенційні ризики, що впливають на систему (таблиця 1).

Матриця оцінки ризику визначає ризик на основі двох пересічних елементів: ймовірності того, що подія ризику (атака) відбудеться, і потенційної тяжкості шкоди, яку подія ризику завдає системі. Залежно від ймовірності атаки та тяжкості атаки ризик атаки можна класифікувати як низький, середній і високий, як це показано у Таблиці 1, або на більш детальному рівні залежно від вимог конкретного аналізу ризику. У цій дослідницькій роботі використовують матрицю оцінки ризику та таке рівняння:

$$\text{Ризик} = \text{Ймовірність} \times \text{Ступінь}, \quad (5)$$

де отриманий Ризик може бути низький, середній або високий, Ступінь атаки – низький, середній та високий, а Ймовірність відповідно – низька, середня та висока.

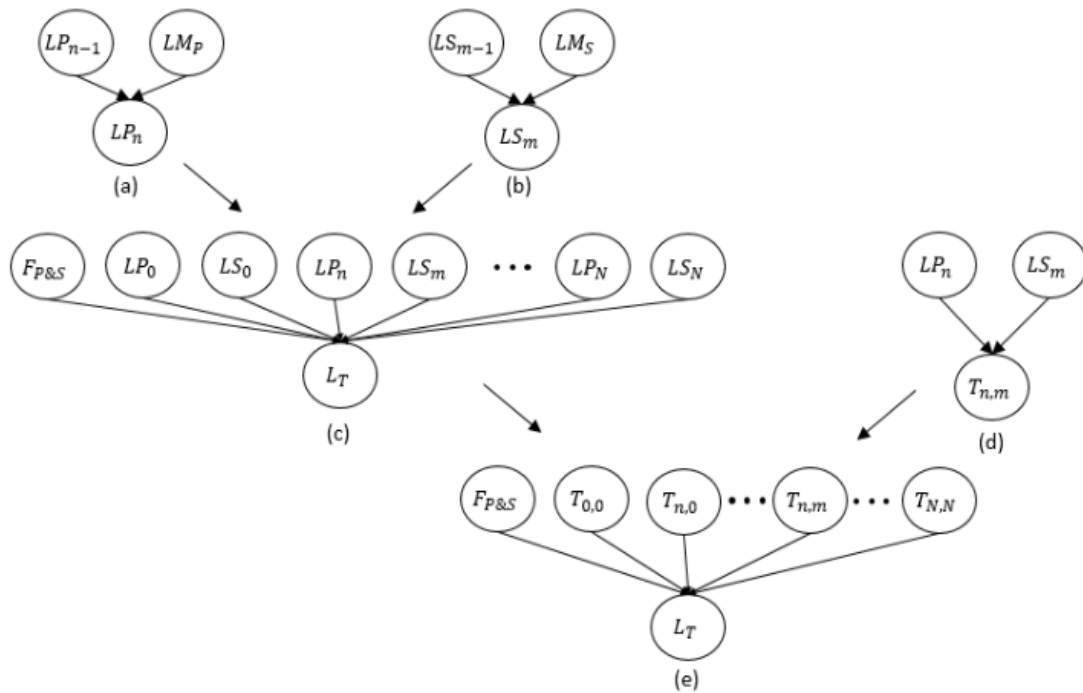


Рис. 1 Басова мережа, що ілюструє процес агрегації ризиків

Таблиця 1

Матриця оцінки ризику

Ступінь атаки	Ймовірність атаки		
	Низька	Середня	Висока
Високий	Ризик середній	Ризик високий	Ризик високий
Середній	Ризик низький	Ризик середній	Ризик високий
Низький	Ризик низький	Ризик низький	Ризик середній

Авторами роботи [7] пропонується проведення аналізу побудованого дерева атак здійснювати таким чином, щоб акцентувати увагу на тих елементах, які мають найбільш високі ризики. Цей метод має такі переваги, як наочність, простота використання, яка допомагає визначити критичні точки вразливості, але в контексті завдання оцінки ризиків в ІКС ВП ключовим недоліком цього методу є те, що ця модель не враховує всі можливі фактори та повністю залежить від досвіду і компетентності запрошених експертів. Використання розглянутої моделі явно не дозволяє враховувати накопичені статистичні дані щодо кібератак.

Метод кількісної оцінки ризиків (QRA) представлений у вигляді документа NATO Sciences and Technology Organization MP-IST-166 [8], що детально описує відповідну процедуру. Оцінки ризиків відбуваються за допомогою матриці QRA (таблиця 2). Ризик, пов'язаний з небажаною подією, є наслідком серйозності події та ймовірності її виникнення, при цьому матриця QRA створена на основі військового стандарту США, розробленого в Лос-Аламоській Національній лабораторії, U.S.MIL-STD 882e [13], та використовується для розрахунку рей-

тингу ризику зваженим способом. Категорії серйозності небажаних подій представлені в таблиці 2 та категорії ймовірності небажаної події представлені в таблиці 3 разом із матрицею оцінки ризиків (таблиця 4) є стандартизованим рейтингом, який характеризує систему оцінки ризику у форматі, який вимагає певних управлінських дій для контролю ризику (представлений рівнями 1–4 у таблиці 4).

Стандарт передбачає різні варіанти управлінських дій для деяких випадків, коли ймовірність виникнення не буде оцінюватися як часта, а потенційна серйозність небажаних подій вимагає вжиття дій для мінімізації ризику. Наведені в матриці оцінки ризику значення можуть бути використані під час прийняття рішення щодо того, чи слід усунути чи контролювати окремі вразливі місця, щоб зменшити виникнення конкретної небажаної події, чи слід прийняти пов'язаний із цим ризик. Наприклад, якщо небажаний події «втрата критично важливої секретної інформації» було присвоєно категорію ризику захисту та безпеки (SSRC) IC (найвищий рівень серйозності, випадкова ймовірність) та індекс ризику та безпеки (SSRI) 1, що вимагає управління дії для зниження ризику до наступного нижчого рівня.

Таблиця 2
Категорії серйозності небажаних подій

Рівень	Характеристики ступеня
I	Втрата життя, втрата важливої конфіденційної інформації, втрата критичних активів, значне погіршення місії, втрата системи.
II	Тяжкі травми працівника або іншої особи, втрата конфіденційної інформації та фізичного обладнання, що є результатом непоміченого доступу, неприйнятних затримок місії, неприйнятного збою системи та операцій.
III	Незначна травма, яка не вимагає госпіталізації, невиявлене або невчасно виявлене несанкціоноване проникнення, що призвело до обмеженого доступу до активів або конфіденційних матеріалів, відсутність погіршення завдання, незначний збій системи та зрив операцій.
IV	Менше ніж незначне ушкодження, невиявлене або невчасно виявлене несанкціоноване проникнення без втрати активів або доступу до конфіденційних матеріалів, без збоїв у системі чи роботі.

Таблиця 3
Категорії ймовірності небажаної події

Категорія ймовірності	Рівень	Опис події
A	Часто	Можливість повторення інцидентів
B	Можливо	Можливість ізольованих інцидентів
C	Випадково	Можливість трапитися коли-небудь
D	Рідкісний	Можливо ніколи не відбудеться
E	Неймовірний	Практично неможлива

Тому, припускаючи правильну оцінку, необхідно вжити заходів для усунення або контролю ризику, пов'язаного з цією подією. Інші ризики, які підпадають під цю категорію, представлені в ІА, ІВ, ІС, ІІА, ІІВ і ІІІА. Часто слід також вживати заходів для мінімізації ризику небажаних подій із значеннями SSRC2. Ризики цієї категорії включають ІD, ІІС, ІІD, ІІВ та ІІІС. Такі ризики вимагають коригувальних дій, хоча передбачається певний розсуд керівництва [8].

Розглянутий метод кількісної оцінки ризиків (QRA) схожий на метод аналізу дерева атак з вико-

ристанням матриці оцінки ризиків для визначення ступеня ризику. Матриця має більшу деталізацію і явно передбачені управлінські дії для кожного рівня ризику, але в контексті завдання оцінки ризиків в ІКС ВП неоліки методу ті самі, що і для попереднього методу. Цей метод не дає можливості використати накопичені статистичні дані щодо кібератак і повністю залежить від досвіду і компетентності залучених для оцінки експертів.

Метод Монте-Карло для оцінки ризиків кібербезпеки використовує статистичні дані та ймовірнісні розподіли для розрахунку ймовірності та величини втрат, що дозволяє за допомогою математичного апарату порівнювати різні сценарії і створювати прогнози втрат, при цьому підбираючи оптимальну стратегію протидії [9]. Головною перевагою методу є здатність обробляти складні системи та враховувати невизначеність. При цьому математичний апарат методу дозволяє покращувати результати прогнозів із накопиченням реальних даних щодо атак, що є критично важливим у контексті поставленого завдання. Недоліком методу Монте-Карло можна назвати високі вимоги до обчислювальних ресурсів, а також складність інтерпретації результатів.

На тлі розглянутих методів Баєсових мереж, аналізу дерева атак та кількісної оцінки ризиків використання методу Монте-Карло можна вважати найбільш доцільним у контексті поставленого в цій роботі завдання оцінки ризиків в ІКС ВП. Так методи аналізу дерева атак та кількісної оцінки ризиків не дозволяють задіяти накопичені статистичні дані та орієнтовані на експертну оцінку, що робить їх дуже залежними від суб'єктивної думки експертів, а з огляду на безпрецедентний масштаб агресії російської федерації в кіберпросторі, спрямований проти ІКС ВП України, така залежність методів від експертних оцінок не дозволяє ефективно їх застосувати в умовах, що розглядаються. Головним недоліком методу Баєсових мереж є необхідність перебудовувати мережу з отриманням нового досвіду кібератак, який не вкладається в побудовану раніше модель. Як показує досвід протидії кібератакам рф з 2022 року, такі події трапляються доволі часто (до декількох разів на рік), враховуючи трудомісткість процесу перебудови Баєсової мережі,

Таблиця 4
Матриця оцінки ризику (SSRC)

Категорії серйозності	Категорії ймовірності				
	(A) Часто	(B) Можливо	(C) Випадково	(D) Рідкісний	(E) Неймовірний
I	ІА	ІВ	ІС	ІD	ІЕ
II	ІІА	ІІВ	ІІС	ІІD	ІІЕ
III	ІІІА	ІІІВ	ІІІС	ІІІD	ІІІЕ
IV	ІV А	ІV В	ІV С	ІV D	ІV Е

це нівелює переваги методу, пов'язані із кращим прогнозуванням за деяких специфічних видів розподілу вхідних даних. Математичний апарат методу Монте-Карло буде розглянуто в наступних розділах у процесі адаптації методу під потреби завдання оцінки ризиків в ІКС ВП на базі вже розробленого алгоритму оцінки ризиків кібербезпеки АОРІКС-В [2].

Методика дослідження. Методологічною основою цього дослідження є системний підхід до аналізу проблем кібербезпеки, що дозволяє розглядати ІКС ВП як складні об'єкти, що функціонують в умовах гібридної війни із широкомасштабним застосуванням противником засобів кібервпливу в умови високої інтенсивності таких дій. Для досягнення поставленої мети були використані аналіз літературних джерел та нормативних документів з питань кібербезпеки, оцінки ризиків та управління інформаційною безпекою, включаючи стандарти ISO/IEC 27000, NIST, MP-IST-166 та інші, порівняльний аналіз наявних методів кількісної оцінки ризиків кібербезпеки, таких як методи Басових мереж, аналізу дерева атак, кількісної оцінки ризиків (QRA) та Монте-Карло, з метою виявлення їхніх переваг та недоліків у контексті оцінки ризиків кібербезпеки у системах військового призначення, математичне моделювання процесів оцінки ризиків за методів математичної статистики. За результатом застосування вказаних методів була здійснена математична модель оцінки ризиків кібербезпеки, адаптована до специфіки інформаційно-комунікаційних систем військового призначення та реалій гібридної війни з деталізацією кроків цього алгоритму.

Застосування згаданих методів дослідження дозволило провести комплексний розгляд проблеми оцінки ризиків кібербезпеки в умовах гібридної війни та запропонувати новий комплексний підхід із застосуванням методів математичної статистики в комбінації із проведенням експертних оцінок, що дозволяє повною мірою врахувати специфіку військових інформаційно-комунікаційних систем у контексті неможливості використання традиційного підходу з оцінкою потенційних фінансових втрат. Запропонований метод оцінки ризиків може стати основою застосування ефективних стратегій кіберзахисту та підвищення кіберстійкості інформаційно-комунікаційних систем військового призначення.

Математична модель оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП. У роботі [2] був описаний перспективний алгоритм оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП (АОРІКС-В), зображений на рис. 2, що відповідає вимогам оцінки ризиків в умовах ведення агресивної війни та чинним в Україні державним стандартам. Наступним кроком, що дозволяє підійти до вирішення завдання з оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП, є розробка мате-

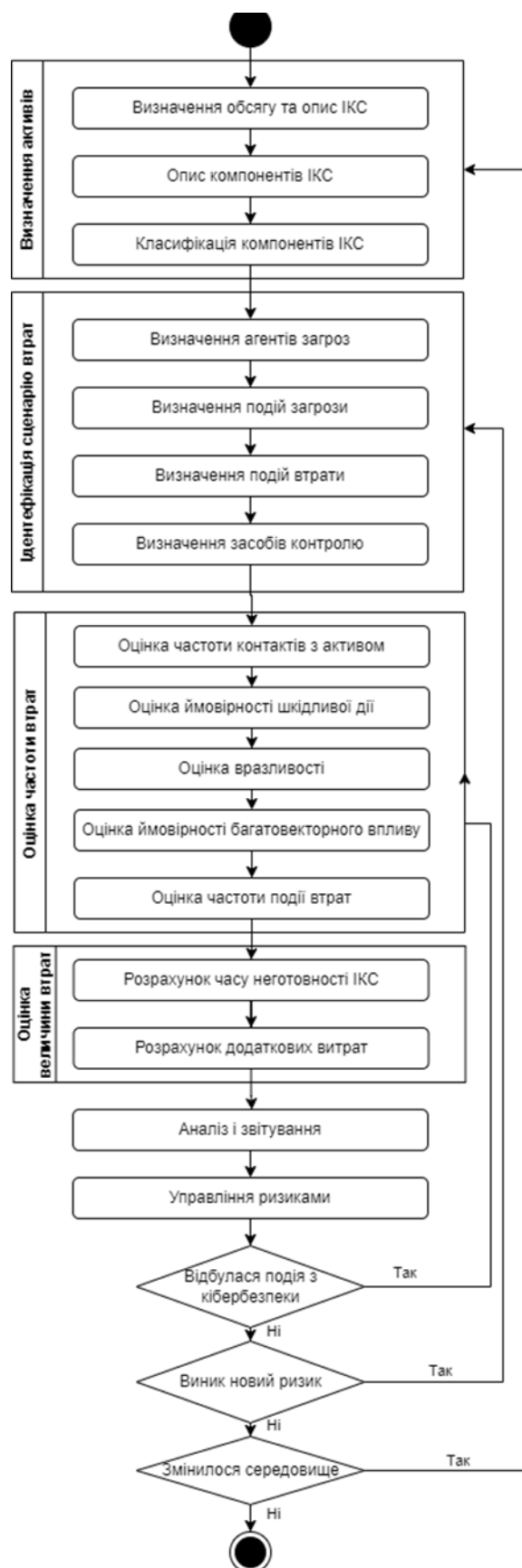


Рис. 2. Алгоритм АОРІКС-В

матичної моделі, яка має бути використана у разі виконання кроків, передбачених зазначеним алгоритмом. Але, на відміну від описаного в популярних кількісних методологіях підходу, де оцінка ймовірних втрат здійснюється з використанням фінансових показників, розроблена математична модель буде використовувати оцінку потенційного часу неготовності системи, як показника більш прийняттого для систем військового призначення, де неможливо здійснити оцінку потенційних втрат, виражену у фінансовому еквіваленті. При цьому передбачається проведення розрахунків вартості впровадження контрзаходів і порівняння потенційного часу неготовності системи, що дозволить особам, які приймають рішення, діяти в межах виділеного бюджету і здійснювати обґрунтування виділення фінансування, необхідного для розбудови кіберзахисту в ІКС ВП. В основі математичної моделі, яка пропонується для здійснення кроків оцінки ризиків в ІКС-ВП, передбачених алгоритмом АОРІКС-В, будемо застосовувати метод Монте-Карло [9]. Вибір цього методу зумовлений його гнучкістю, можливістю врахувати невизначеність під час здійснення оцінки та порівняною універсальністю, що вирізняє його від можливо більш точного, але прив'язного до статичної моделі здійснення кібератак методу Баєсових дерев.

Оцінка частоти подій втрат. Розглянемо, як можна використати метод Монте-Карло у контексті оцінки ризиків в ІКС ВП. Відповідно до діаграми діяльності алгоритму АОРІКС-В[2] (рисунк 2) першим кроком, який потребує використання математичних розрахунків, є «Оцінка частоти втрат». У результаті цього кроку має бути визначений числовий показник частоти подій втрат (ЧПВ). У методології OpenFAIR частота подій втрат (Loss Event Frequency) визначається як ймовірнісна частота настання певної небажаної події протягом визначеного періоду часу [11]. При цьому ЧПВ не є фіксованим значенням, а оцінкою ймовірності того, як часто може відбуватися небажана подія. До небажаних подій відносять ті, які можуть призвести до втрат або збитків. Слід зазначити, що ЧПВ завжди прив'язана до певного періоду часу, наприклад, року, місяця або доби, та при цьому вона є ключовим фактором у кількісному аналізі ризиків, оскільки безпосередньо впливає на загальний рівень ризику. Чим вища ЧПВ, тим вищий ризик, пов'язаний з цією подією [11].

Залежно від виду активу, для якого відбувається оцінка ризику, оцінка ЧПВ може проводитися різними способами. Найпростіший варіант, а саме пряма оцінка, застосовується у разі якщо доступні історичні дані та/або ймовірнісні показники задані у вигляді характеристик активу. Використання прямої оцінки обмежено тим, що не

враховує невизначеність, тому воно може бути застосовано тільки у разі, коли дані про ймовірність подій, пов'язаних із втратами, можна вважати сталими. Якщо наявні історичні дані про подію не дозволяють вважати її ймовірність сталою, то можна використати розподіл Бернуллі (для разових подій), Біноміальний розподіл (для подій, що можливо описати за допомогою двох станів), Бета-розподіл або розподіл Пуассона (у разі коли важливо врахувати невизначеність).

У разі, коли оцінка проводиться для разового випадку втрат і відомою вірогідністю події, пов'язаної із цими втратами, доцільно використати розподіл Бернуллі [12] із параметром p настання події втрат A , якщо ймовірність настання цієї події протягом заданого інтервалу часу є $P(A)=p$, тоді дискретна випадкова величина ξ буде мати закон розподілу:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де p – ймовірність настання події втрат, $p \in [0,1]$, а $q=1-p$.

Для випадку оцінки ЧПВ в ІКС ВП можна навести приклад подій втрат, пов'язаних із відмовою сервера, для якого вірогідність відмови є величиною, що може бути розрахованою із показників надійності, наданих виробником.

Більш складний випадок прямої оцінки ЧПВ для випадку незалежних подій із фіксованою кількістю спроб, які можна описати двома станами, такими як «подія відбулася» та «подія не відбулася». При цьому використовується біноміальний розподіл, де кількість спроб задана параметром n , а кількість «успіхів», коли подія відбулася, задана параметром k . Тоді дискретна випадкова величина ξ має біноміальний розподіл ймовірності P , що задається формулою:

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (6)$$

де p – ймовірність настання окремої незалежної події, $q=1-p$, n – кількість спроб, а k – кількість успіхів.

Біноміальний розподіл у контексті оцінки ризиків кібербезпеки ІКС ВП можна використати, наприклад, для оцінки події втрат, пов'язаної з успішними фішинговими атаками. Будемо вважати ймовірність успіху атаки сталою величиною (припустимо це ймовірність того, що користувач у разі отримання фішингового повідомлення перейде за наданим у повідомленні посиланням), тоді за умови розсилки фішингових повідомлень усім зареєстрованим користувачам поштового сервісу (загальна кількість користувачів – це відома і стала величина) біноміальний розподіл дозволяє оцінити, скільки користувачів із загальної кількості отримувачів повідомлення перейдуть за наданим зловмисниками посиланням.

Велике практичне значення саме в контексті оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП грає бета-розподіл. У разі коли необхідно мати можливість зробити оцінку ЧПВ із спостереження кількості успіхів s у серії n випробувань можливо застосувати теорему Байєса, а розподіл імовірностей визначається бета-розподілом заданою для випадкової величини X густиною ймовірності f_X :

$$f_X(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad (7)$$

де α, β – фіксовані параметри, а бета-функція задана, як $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$.

Розглянемо приклад використання бета-розподілу в контексті оцінки ризиків кібербезпеки. Проведемо оцінку ризику витоку конфіденційних даних з інформаційної системи компанії. Припустимо для оцінки ймовірності успішної атаки використовуються експертні оцінки і думка експертів складається з найменш песимістичних оцінок x_{min} , найбільш ймовірних значень – x_μ та найбільш песимістичних оцінок – x_{max} . Визначити параметри α і β бета-розподілу можна за допомогою методу моментів. Для цього слід розрахувати середнє значення μ та дисперсію σ^2 на основі наведених експертних оцінок, тоді для розрахунку параметрів α і β можна використати формули:

$$\alpha = \mu \left(\frac{\mu(1-\mu)}{\sigma^2} - 1 \right) \text{ та} \\ \beta = (1-\mu) \left(\frac{\mu(1-\mu)}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (8)$$

де α і β – параметри бета розподілу, μ – середнє значення та σ -дисперсія.

Після розрахунку параметрів α і β можна згенерувати випадкові числа з бета-розподілу. Ці випадкові числа будуть представляти різні можливі значення ймовірності успішної атаки, що дозволяє врахувати невизначеність в експертних оцінках та в моделі ризиків під час симуляції Монте-Карло.

Для події втрат, що мають достатню велику кількість історичних даних під час розрахунку ЧПВ, зручно використовувати розподіл Пуассона. Відоме середнє значення кількості подій, що призвели до втрат за заданий період часу, позначається як параметр λ розподілу Пуассона, тоді оцінка кількості подій, що можуть відбутися, позначається як параметр k , а розподіл Пуассона ймовірності P буде мати вигляд:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (9)$$

де P – ймовірність, λ – параметр розподілу Пуассона, k – кількість подій, що можуть відбутися.

Властивість процесу Пуассона пов'язана з тим, що він не залежить від попередніх подій, що дозволяє значно спростити деякі розрахунки в процесі оцінки ризиків. Наприклад, якщо середня кількість подій відповідає передбачуваним місяч-

ним коливанням протягом року, а підрахунки протягом кожного місяця відповідають пуассонівським процесам, тоді загальна кількість подій за рік відповідатиме розподілу Пуассона із середнім рівним сумі середніх підрахунків за кожен місяць.

$$P(\lambda t) = P(\lambda t_1) + P(\lambda t_2) + \dots + P(\lambda t_n), \quad (10)$$

де P – ймовірність, λ – параметр розподілу Пуассона, а $t_1, t_2, \dots, t_n$ – різні часові інтервали.

Для двох незалежних подій відмов A та B за умови їх оцінки за розподілом Пуассона загальна частота відмов буде дорівнювати:

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \quad (11)$$

де $P(A + B)$ – ймовірність настання події A або B , де $P(A)$ та де $P(B)$ – ймовірність настання події A та B відповідно.

Розглянемо застосування розподілу Пуассона для оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП на прикладі оцінки ЧПВ недоступності онлайн-сервісу через DDoS-атаки. Припустимо, що DDoS-атаки відбуваються випадково та незалежно одна від одної, тоді середнє значення (λ) можна розрахувати як середню кількість атак на місяць, а розподіл Пуассона із параметром λ використати для моделювання кількості DDoS-атак на місяць. При цьому використання розподілу Пуассона дозволяє врахувати випадковий характер DDoS-атак та оцінити цей ризик для прийняття рішень щодо організації захисту онлайн-сервісу від подібних атак.

У випадках, коли розрахувати ЧПВ за допомогою прямої оцінки неможливо, розрахунок проводиться з декомпозицією цього показника. Можна доповнити вже наведений приклад фішингової розсилки листів елементом декомпозиції. Припустимо, що, окрім переходу за посиланням, у фішинговому листі є ще відмінна від одиниці ймовірність введення облікових даних у формі за цим посиланням, вважатимемо ці події незалежними тоді:

$$\text{ЧПВ} = \text{ЙВЛ} * \text{ЙВД}, \quad (12)$$

де ЧПВ – частота подій втрат, ЙВЛ – ймовірність відкриття листа, ЙВД – ймовірність введення облікових даних.

Наведений приклад показує, що декомпозиція дозволяє врахувати різні фактори, що впливають на ЧПВ і здебільшого спрощує оцінку так, як оцінювати окремі компоненти ЧПВ може бути простіше.

Попередня формула була справедлива для випадків, коли події є незалежними, якщо між компонентами ЧПВ є залежності, то їх необхідно врахувати під час розрахунку. Однак під час проведення багатовекторних кібератак кожен наступний крок залежить від успіху виконання попереднього кроку. Для розгляду подібних атак доцільно використовувати декомпозицію ЧПВ

та симуляцію Монте-Карло. Розглянемо декілька прикладів пошуку ЧПВ для події, які не можна вважати незалежними.

Перший приклад декомпозиції – це випадок із підсумовування подій Бернуллі з розподілом Пуассона. До прикладу проаналізуємо ризик виходу з ладу серверів у компанії. Припустимо, що кожен сервер має певну ймовірність вийти з ладу протягом року. Це можна розглядати як подію Бернуллі, де «успіх» – це вихід сервера з ладу. Тоді кількість серверів, що виходять з ладу кожного року, може варіюватися. Варіативність виходу з ладу серверів моделюється за допомогою розподілу Пуассона із параметром λ , який буде описувати середню кількість серверів, що виходять з ладу щороку. Щоб оцінити загальний ризик, пов'язаний з виходом серверів з ладу, слід розрахувати, скільки серверів можуть вийти з ладу в найгіршому випадку. Використаємо для цього симуляцію Монте-Карло, підсумовуючи випадкову кількість подій Бернуллі (вихід кожного сервера з ладу) згідно з розподілом Пуассона. Для цього багаторазово (зазвичай десятки тисяч разів) генеруються випадкові числа із розподілу Пуассона з параметром λ та проведенням симуляції для кожного з цих серверів і підсумовуванням кількості серверів, що вийшли з ладу в цій симуляції, що дозволить знайти верхню оцінку кількості серверів, які можуть вийти з ладу протягом року.

Декомпозиція із підсумовуванням подій Бернуллі з розподілом Пуассона використовується у випадках, коли ЧПВ складається з багатьох незалежних подій з двома можливими результатами («успіх» та «невдача»), а кількість цих подій, що відбуваються, є випадковою величиною, яку можна змоделювати за допомогою розподілу Пуассона. Це може бути кількість хакерських атак на систему, які є успішними (кожна атака розглядається як подія Бернуллі, а загальна кількість атак підпорядкована розподілу Пуассона), або кількість співробітників, які відкривають фішинговий лист (дії кожного співробітника розглядаються як подія Бернуллі, а загальна кількість відкритих фішингових листів підпорядкована розподілу Пуассона).

Як другий приклад наведемо порядок оцінки ЧПВ для багатовекторної кібератаки на вебдодаток, використовуючи симуляцію Монте-Карло. Нехай сценарій кібератаки, для якої оцінюється ЧПВ, складається із фішингу, спрямованого на отримання облікових даних співробітників з доступом до адміністративної панелі вебдодатка, DDoS-атаки, спрямованої на перевантаження серверів вебдодатка та експлуатації вразливості в коді вебдодатка для отримання несанкціонованого доступу до даних. Для кожного вектора атаки визначимо входні змінні та їх розподіли ймовірностей.

Вектор 1 (фішинг) включає такі параметри: кількість надісланих фішингових листів (N_1) та розподіл Пуассона з λ_1 , що показує середню кількість листів за місяць, в яких користувач переходить за надісланим посиланням, при цьому ймовірність відкриття листа (p_{11}) підпорядкована бета-розподілу з параметрами α_{11} , β_{11} , які знаходяться внаслідок проведення експертної оцінки, а ймовірність введення облікових даних (p_{12}) підпорядкована бета-розподілу з параметрами α_{12} та β_{12} (визначеними за допомогою експертної оцінки).

Вектор 2 (DDoS) включає параметри: кількість DDoS-атак (N_2) із розподілом Пуассона з λ_2 (що відповідає середній кількості атак на місяць) та ймовірність успішної атаки (p_2), що підпорядкована бета-розподілу з параметрами α_2 , β_2 (які отримані внаслідок проведення експертної оцінки).

Вектор 3 (експлуатація вразливості) включає такі параметри, як частота спроб експлуатації вразливості (N_3), розподіл Пуассона з λ_3 (що відповідає середній кількості спроб на місяць) та ймовірність успішної експлуатації вразливості (p_3), підпорядковану бета-розподілу з α_3 та β_3 , які отримані внаслідок проведення експертної оцінки.

Проведення симуляції Монте-Карло починається із генерації великої кількості (десятки тисяч) випадкових значень для кожної входної змінної згідно з їх розподілами. В кожній симуляції проводиться розрахунок кількості успішних атак для кожного вектора атаки. Оцінка кількості успішних атак по вектору 1:

$$N_{1\text{усп}} = B(N_1, p_{11} \cdot p_{12}), \quad (13)$$

де N_1 – кількість надісланих фішингових листів, p_{11} – ймовірність відкриття листа, а p_{12} – ймовірність введення облікових даних.

Оцінка кількості успішних атак по вектору 2:

$$N_{2\text{усп}} = B(N_2, p_2), \quad (14)$$

де N_2 – кількість DDoS атак, p_2 – ймовірність успішної DDoS атаки.

Оцінка кількості успішних атак по вектору 3:

$$N_{3\text{усп}} = B(N_3, p_3), \quad (15)$$

де $B(N_3, p_3)$ – біноміальний розподіл з параметрами, N_3 – частота спроб експлуатації вразливості та p_3 – ймовірність успішної експлуатації вразливості.

Подія втрат вважається такою, що відбулася, якщо хоча б один з векторів атаки був успішним, а ЧПВ розраховується як відношення кількості ітерацій, в яких відбулася подія втрат, до загальної кількості ітерацій.

Показані приклади ілюструють переваги симуляції Монте-Карло в проведенні аналізу бага-

товекторних атак. Використання методу Монте-Карло дозволяє врахувати невизначеність в оцінках вхідних параметрів та складні залежності між векторами атак. При цьому можна легко змінювати вхідні параметри та розподіли для дослідження різних сценаріїв атак.

Підсумовуючи викладене щодо кроку алгоритму АОРІКС-В «Оцінка частоти втрат», можна сказати таке. Здебільшого виконання оцінки частоти втрат потребує декомпозиції цієї події з окремим аналізом для частоти контактів зловмисника з активом та оцінки ймовірності шкідливої дії внаслідок контактів. У випадку коли події контакту та шкідливої дії можна розглядати як незалежні для пошуку ЧПВ, використовується простий добуток отриманих ймовірностей (при цьому слід слідкувати, щоб згадані оцінки були проведені для однакового часового проміжку). У разі, якщо аналізуються залежні події, такі як послідовні сценарії атак або багатовекторні атаки для оцінки ЧПВ, використовується симуляція Монте-Карло, що дозволяє врахувати невизначеність в оцінках вхідних параметрів та складні залежності між векторами атак.

Оцінка величини втрат. Наступним кроком, що потребує виконання математичних розрахунків із передбачених алгоритмом АОРІКС-В, є оцінка величини втрат. На цьому кроці для ІКС ВП пропонується проводити оцінку не фінансових втрат, а часу неготовності системи. Це є ключовою відмінністю алгоритму від традиційного підходу методології FAIR, де пропонується для оцінки величини фінансових втрат використовувати триточкову оцінку, логнормальний розподіл та узагальнений розподіл Парето (слід зазначити, що методологія також передбачає і інші розподіли, але детальний опис застосування у супровідній документації описано саме для цих трьох). При цьому логнормальний розподіл та узагальнений розподіл Парето вибрані розробниками методології [10] за можливість моделювати ситуації, коли втрати можуть мати дуже великі значення. Наприклад, логнормальний розподіл підходить для моделювання ситуацій, коли втрати можуть приймати дуже великі значення, але з малою ймовірністю, а узагальнений розподіл Парето добре підходить для моделювання екстремальних подій, таких як кібератаки з катастрофічними наслідками, що несуть великі фінансові втрати та або ведуть до природних катастроф [14]. Ці два розподіли не підходять для моделювання часу неготовності ІКС, позаяк, на відміну від величин фінансових втрат, час неготовності ІКС не може прямувати до дуже великих значень. Це виходить із того факту, що практичний зміст оцінки втрачає сенс після певних часових показників, коли прогнозований час відновлення працездатності

системи стає порівняним із часом, необхідним на розбудову її з нуля. Слід зазначити, що в деяких роботах, присвячених моделюванню відмови інформаційно-комунікаційної системи, іноді пропонується використовувати логнормальний розподіл для моделювання ситуацій, коли час непрацездатності може приймати дуже великі значення, але з малою ймовірністю [15], але це у випадку з ІКС ВП не можна застосувати на практиці, а ось головний недолік логнормального розподілу, а саме його непридатність для моделювання коротких часів непрацездатності [15], змушує відмовитись від його застосування в контексті поставленого завдання.

Розглянемо приклади оцінки часу неготовності ІКС ВП у контексті виконання етапу оцінка часу неготовності ІКС кроку «Оцінка величини втрат» із використанням згаданих розподілів. Отримання функції розподілу ймовірності дозволить у майбутньому скористатися симуляцією Монте-Карло для формування остаточної оцінки ризику кібербезпеки в ІКС ВП. Згідно з даними, наведеними в роботах [16; 17], для формування розподілу ймовірності часу простою інформаційно-комунікаційних систем використовують експоненціальний розподіл, розподіл Вейбулла та гамма-розподіл, а у разі недостатньої кількості експериментальних даних і наявності тільки експертних оцінок можливе використання триточнової оцінки. Опишемо типові сценарії оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП і процес вибору відповідного розподілу для оцінки ймовірності часу неготовності системи.

Розглянемо приклад, коли вебсервер компанії, що забезпечує доступ до критично важливих онлайн-сервісів, щойно запущено в роботу. З огляду на той факт, що сервер тільки розпочав роботу, історичних даних, які дозволять сформулювати оцінку часу його непрацездатності внаслідок здійснення DDoS-атаки, не існує. В таких умовах для оцінки величини втрат, згідно з алгоритмом АОРІКС-В, використовуються експертні оцінки та триточковий розподіл. Завдання експертів – сформувати оцінки мінімального часу неготовності системи a , найбільш ймовірного m та максимального часу b , тоді очікуваний час неготовності системи буде розраховуватися за формулою:

$$T = \frac{a + 4m + b}{6}, \quad (16)$$

де a – мінімальний час неготовності системи, m – найбільш ймовірний час неготовності системи та b – максимальний час неготовності системи, при цьому стандартне відхилення розраховується як

$$\sigma = \frac{b - a}{6}, \quad (17)$$

де a – мінімальний час неготовності системи та b – максимальний час неготовності системи.

Розглянемо попередній приклад з неготовністю системи внаслідок DDoS атаки за умови, коли сервер уже попрацював деякий час і є наявні історичні дані про час його відновлення після подібних атак. Найбільш оптимальним розподілом, що підходить для оцінки часу неготовності ІКС ВП, буде експотенціальний розподіл, позаяк він добре підходить для випадків, коли система може бути швидко відновлена після атаки (експотенціальний розподіл припускає, що система миттєво відновлюється після збою) [16]. В такому випадку слід задати тільки один параметр $\lambda = \frac{1}{t_a}$, де t_a – розрахований на основі історичних даних середній час неготовності системи під час здійснення DDoS-атаки. Функція розподілу щільності ймовірності матиме вигляд:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (18)$$

де λ – параметр розподілу, t – час тривалості оцінки.

Моделювання часу неготовності ІКС ВП за допомогою експотенціального розподілу доцільно використовувати в умовах, коли кібератаки відбуваються випадково та незалежно одна від одної, частота атак є приблизно постійною протягом часу, а система може бути швидко відновлена після атаки. Але також є низка суттєвих обмежень на застосування експотенціального розподілу, оскільки він бути неточним, якщо частота атак не є постійною або час відновлення не є експотенціально розподіленим і цей розподіл не підходить для оцінки часу неготовності системи внаслідок атак різного типу з різними частотами та часом відновлення.

У тих випадках, коли застосування експотенціального розподілу недоцільне, а саме для оцінки часу неготовності ІКС ВП внаслідок складних атак зі змінною інтенсивністю, краще використовувати розподіл Вейбула, що має два параметри. Перший з параметрів – це параметр форми k , який визначає характер частоти відмов. Для $k < 1$ це спадаюча частота відмов (ймовірність відмови з часом зменшується) $k = 1$ (постійна частота відмов, ймовірність відмови залишається сталою протягом часу і розподіл Вейбула за таких умов стає експотенціальним розподілом) та $k > 1$ – це зростаюча частота відмов (ймовірність відмови з часом збільшується). В контексті моделювання часу неготовності ІКС ВП $k < 1$ може бути застосовано для моделювання атак на нові системи або системи з новими вразливостями, де ймовірність атаки може зменшуватися з часом, коли вразливості виправляються. Параметр $k = 1$ може бути використано для моделювання атак, які відбуваються випадково та не залежать від часу, наприклад, фішингові атаки а $k > 1$ може бути застосовано для моделювання атак на системи, які з часом стають більш вразливими, наприклад, через

застаріле програмне забезпечення або відсутність оновлень безпеки. Слід також враховувати, що параметр k може змінюватися з часом, тому необхідно регулярно переглядати та оновлювати його оцінку. Другий параметр аналогічний параметру експотенціального розподілу $\lambda = \frac{1}{t_a}$, де t_a – розрахований на основі історичних даних середній час неготовності системи. Функція розподілу щільності ймовірності:

$$F(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{(k-1)} e^{-(x/\lambda)^k}, \quad (19)$$

де k – це параметр форми, λ – параметр розподілу розрахований за допомогою даних про середній час неготовності.

У випадку коли під час проведення оцінки часу неготовності ІКС слід враховувати різні фактори, такі як складність атаки, методи виявлення, ефективність реагування на інцидент, доступність резервних копій та інші, доцільно проводити цю оцінку з використанням гамма-розподілу. Основною перевагою цього розподілу є можливість моделювати широкий спектр форм розподілу часу непрацездатності, що дозволяє врахувати різні фактори та більш точну оцінку часу неготовності ІКС порівняно з простішими розподілами. При цьому його застосування більш складне і вимагає більш глибокого розуміння статистичних методів, а для точного оцінювання параметрів потрібна достатня кількість історичних даних.

Розглянемо приклад оцінки величини втрат (часу неготовності ІКС) внаслідок атаки на внутрішню мережу компанії, що містить конфіденційні дані. За допомогою АРТ-атаки (Advanced Persistent Threat), спрямованої на викрадення даних. До можливих втрат, що призводять до неготовності ІКС ВП, належать витрати часу на розслідування втрати даних та відновлення повної працездатності системи. Проведемо оцінку часу неготовності з гамма-розподілом. Для повноцінного застосування гамма-розподілу слід буде провести збір даних, що базується на аналізі інформації про схожі АРТ-атаки, дані з галузевих звітів та експертні оцінки. Слід зібрати інформацію про тривалість перебування злоумисників у мережі до виявлення та час, необхідний для повного відновлення системи після атаки. Час неготовності ІКС ВП визначається як сума часу перебування злоумисників у мережі та часу відновлення системи.

Після збору даних слід використати методи статистичного оцінювання (наприклад, метод максимальної правдоподібності або метод моментів) для визначення параметрів гамма-розподілу, а саме параметру форми α та параметру масштабу (β), що визначає середній час непрацездатності. При $\alpha < 1$ гамма-розподіл має спадаючу функцію щільності ймовірності. Це означає, що короткі часи непрацездатності є більш ймовірними, ніж

довгі. Такий розподіл може бути використаний для моделювання сценаріїв, де система швидко відновлюється після атаки, наприклад, при атаках, які блокують доступ до певних ресурсів, але не пошкоджують саму систему. При $\alpha = 1$ гамма-розподіл перетворюється на експоненціальний розподіл, який вже був розглянутий вище. При $\alpha > 1$ гамма-розподіл має «горб» і більш важкий «хвіст», що означає наявність певний «типового» часу непрацездатності, але також ймовірність дуже довгих часів відновлення. Такий розподіл може бути використаний для моделювання сценаріїв, де атаки призводять до значних пошкоджень системи, і час відновлення може бути дуже тривалим, наприклад, у разі атак, які знищують дані або пошкоджують критичні компоненти ІТ-інфраструктури. Наприклад, DoS-атака на вебсервер може бути описана гамма-розподілом з параметром α близьким до 1, якщо атаки призводять до випадкових збоїв, або більше 1, якщо атаки можуть призвести до перевантаження системи та тривалого часу відновлення. Для атаки програм-вимагачів параметр α розподілу може бути більше 1, оскільки час відновлення залежить від багатьох факторів, таких як наявність резервних копій, складність розшифровки даних та швидкість реагування ІТ-фахівців. Для складної АРТ-атаки параметр α може бути значно більше 1, оскільки АРТ-атаки можуть призводити до тривалого перебування зловмисників у мережі, що ускладнює виявлення та відновлення системи. Час неготовності ІКС ВП внаслідок атаки з використанням SQL-ін'єкції може бути оціненим з α близьким до 1 або більше 1, залежно від впливу атаки на працездатність системи та обсягу викрадених або пошкоджених даних. Вибір відповідного значення α залежить від конкретної ситуації та аналізу історичних даних про атаки та може змінюватися з часом, тому необхідно регулярно переглядати та оновлювати оцінку цього параметра. Загальний вигляд функції розподілу ймовірності для гамма-розподілу:

$$F(x) = \frac{\gamma\left(\alpha, \frac{x}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (20)$$

де $\gamma\left(\alpha, \frac{x}{\beta}\right) = \int_0^{\frac{x}{\beta}} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ – нижня неповна гамма-функція,

а $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ – гамма-функція, α – параметр форми та β – параметр масштабу.

Гамма-розподіл доцільно використовувати для оцінки часу неготовності ІКС ВП, коли цей час залежить від багатьох факторів і наявна достатня кількість історичних даних [17]. Його застосування дозволяє підвищити точність оцінки.

Для оцінки прогнозованого часу простою сис-

теми протягом певного періоду часу, якщо вже відома оцінка ЧПВ та оцінку часу неготовності ІКС відповідно до вибраного методу Монте-Карло для цієї події багаторазово (десятки тисяч разів із випадково згенерованими даними) виконується моделювання кількості подій втрат та моделювання часу неготовності ІКС із розрахунком загального часу простою за допомогою сумування згенерованих значень часу непрацездатності для всіх подій втрат, щоб отримати загальний час простою за цей період. Після завершення симуляції буде отриманий розподіл імовірностей для загального часу неготовності ІКС, що дозволить розрахувати середнє значення, стандартне відхилення, квантилі для оцінки очікуваного часу простою та його варіабельності із візуалізацією результатів.

Наступним етапом кроку «Оцінка величини втрат», згідно з алгоритмом АОРІКС-В, є оцінка додаткових витрат. Він здійснюється під час розробки пакета контрзаходів, які покликані зменшити вразливість системи до кібератак. На цьому кроці для пропонованих сценаріїв організації кіберзахисту ІКС ВП проводиться орієнтовний розрахунок вартості запровадження вибраних контрзаходів і виконується симуляція Монте-Карло із новими значеннями ЧПВ та оцінками часу неготовності ІКС. Такий підхід дозволить оцінити різницю в оцінках загального прогнозованого часу неготовності ІКС за умов запровадження різних пакетів контрзаходів та надати дані для прийняття оптимального рішення щодо розподілу фінансового ресурсу для організації захисту ІКС ВП. Розробка пакета контрзаходів відбувається з метою підвищення стійкості системи до кібератак, орієнтуючись на зменшення ЧПВ та часу неготовності ІКС.

Результати дослідження. В результаті проведеного дослідження було розроблено математичний апарат оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП, який враховує неможливість отримати фінансові дані про втрати для подій відмови систем внаслідок кібератак. На початку роботи проведено порівняння методу Монте-Карло з іншими методами оцінки ризиків кібербезпеки, такими як метод Баєсових мереж, аналіз дерева атак, кількісна оцінка ризиків (QRA), та виявлено, що метод Монте-Карло має низку переваг у контексті оцінки ризиків в ІКС ВП, таких як гнучкість, можливість врахування невизначеності та здатність адаптуватися до динамічних змін у ландшафті загроз. Тому запропонований у роботі підхід базується на методі Монте-Карло та дозволяє оцінити ризики кібербезпеки в умовах невизначеності, використовуючи як основний показник, що впливає на прийняття ризику, потенційний час неготовності ІКС. Дослідження спирається на розроблений у попередній роботі [2] алгоритм оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП (АОРІКС-В). Для кроку «Оцінка

частоти втрат» АОРИКС-В запропоновано використання різних розподілів ймовірностей» (розподіл Бернуллі, біноміальний розподіл, бета-розподіл, розподіл Пуассона) та методу декомпозиції з обґрунтуванням вибору розподілу і прикладами застосування під час проведення оцінки ризиків в ІКС ВП. Для кроку «Оцінка величини втрат» запропоновано використання експоненціального розподілу, розподіл Вейбулла, гамма-розподіл та триточкової оцінки з оцінкою додаткових витрат на впровадження контрзаходів. Запропоновано порядок проведення порівняння різних сценаріїв організації кіберзахисту та підготовки даних, необхідних для прийняття оптимального рішення щодо розподілу фінансового ресурсу.

Для кожного запропонованого розподілу наведено приклади застосування розробленого математичного апарату для різних сценаріїв кібератак на ІКС ВП, що демонструє його практичну цінність.

Висновки. Результати дослідження свідчать, що запропонований математичний апарат та алгоритм АОРИКС-В можуть бути ефективно використані для оцінки ризиків кібербезпеки в ІКС ВП, враховуючи специфіку цих систем та особливості гібридної війни. Подальші дослідження дозволять автоматизувати оцінку ризиків в ІКС ВП, що дозволить здійснювати вплив моделювання загроз у реальному часі і швидко розробляти пакети контрзаходів, які значно підвищують стійкість ІКС ВП в умовах ведення агресивної війни в кіберпросторі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Байдур О.В. Передумови створення моделі кіберзахисту Збройних сил України. *Прикладні системи та технології в інформаційному суспільстві* : збірник тез VII Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 29 верес. 2023 р. Київ, 2023. С. 19–22. URL: https://aistis.knu.ua/wp-content/uploads/2023/09/AISTIS_2023.
2. Байдур О.В. Кількісна методологія оцінки ризиків кібербезпеки при відсутності фінансових даних про втрати. *Кібербезпека: освіта, наука, техніка*. Том 2. № 26, м. Київ, 2024. <https://doi.org/10.28925/2663-4023.2022.17.3145>.
3. Leszczyna R. Review of cybersecurity assessment methods: Applicability perspective. *Computers & Security*. 2021. Vol. 108. P. 102376. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2021.102376>.
4. Cheimonidis P., Rantos K. Dynamic risk assessment in cybersecurity: a systematic literature review. *Future internet*. 2023. Vol. 15, № 10. P. 324. <https://doi.org/10.3390/fi15100324>.
5. Devi R. Information security risk assessment (ISRA): a systematic literature review. *Journal of information systems engineering and business intelligence*. 2022. Vol. 8, № 2. P. 207–217. <https://doi.org/10.20473/jisebi.8.2.207-217>.
6. Wang J., Neil M., Fenton N. A Bayesian Network Approach for Cybersecurity Risk Assessment Implementing and Extending the FAIR Model. *Computers & Security*. 2020. Volume 89. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2019.101659>.
7. Naik N., Grace P., Jenkins P, Naik K., Song J. An evaluation of potential attack surfaces based on attack tree modelling and risk matrix applied to self-sovereign identity. *Computers & Security*. 2022. Volume 120. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2022.102808>.
8. Piper J. Risk Management Framework: Qualitative Risk Assessment through Risk Scenario Analysis, NATO Science and Technology Organization. 2019, p. 51. URL: <https://www.sto.nato.int/publications/STO%20Meeting%20Proceedings/STO-MP-IST-166/MP-IST-166-07.pdf>.
9. The Open Group Guide, The Mathematics of the Open FAIR Methodology. 2022, p. 50. URL: <https://publications.opengroup.org/guides/open-fair/g180>
10. Freund J., Jones J. Measuring and Managing Information Risk: A FAIR Approach. Butterworth-Heinemann, 2014. 408 p. URL: https://www.researchgate.net/publication/387512575_Measuring_and_Managing_Information_Risk_A_FAIR_Approach.
11. The Open Group Risk Analysis (O-RA) Standard, Version 2.0.1. Berkshire, United Kingdom : The Open Group, 2021. 47 p. URL: <https://publications.opengroup.org/c20a>.
12. Hutchins E., Cloppert M., Amin R. Intelligence-Driven Computer Network Defense Informed by Analysis of Adversary Campaigns and Intrusion Kill Chains. Lockheed Martin Corporation, 2011, URL: <https://www.lockheedmartin.com/content/dam/lockheed-martin/rms/documents/cyber/LM-White-Paper-Intel-Driven-Defense.pdf>.
13. Departement of Defence. Standard practice. System safety, MIL-STD-882E, 2012. URL: <https://www.nde-ed.org/NDEEngineering/SafeDesign/MIL-STD-882E.pdf>.
14. Ferreira D.J., Mateus-Coelho N., Mamede H.S. Methodology for Predictive Cyber Security Risk Assessment (PCsRA). *Procedia Computer Science*. 2023. Vol. 219. P. 1555–1563. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2023.01.447>.

15. Рибальченко С.А. Огляд функцій ймовірності для моделювання страхової діяльності. *Ефективна економіка*. № 3, Дніпро, 2013. URL: <http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=1861>.
16. Lawless J. Statistics in Reliability. *Journal of the American Statistical Association*. 2000. 95(451), p. 989–992. <https://doi.org/10.1080/01621459.2000.10474291>.
17. Anderson-Cook C.M., Morzinski J., Blecker K.D. Statistical Model Selection for Better Prediction and Discovering Science Mechanisms That Affect Reliability. *Systems*. 2015, 3, p. 109–132. <https://doi.org/10.3390/systems3030109>.

REFERENCES

1. Baidur, O.V. (2023). Prerequisites for creating a cyber defense model for the Armed Forces of Ukraine. *Applied Systems and Technologies in the Information Society: Collection of Abstracts of the VII International Scientific and Practical Conference*, Kyiv, September 29, 2023 (pp. 19–22). Retrieved from: https://aistis.knu.ua/wp-content/uploads/2023/09/AISTIS_2023.
2. Baidur, O.V. (2024). Quantitative methodology for assessing cybersecurity risks in the absence of financial loss data. *Cybersecurity: Education, Science, Technique*, 2(26). <https://doi.org/10.28925/2663-4023.2022.17.3145>.
3. Leszczyna, R. (2021). Review of cybersecurity assessment methods: Applicability perspective. *Computers & Security*, 108, 102376. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2021.102376/>.
4. Cheimonidis, P., & Rantos, K. (2023). Dynamic risk assessment in cybersecurity: A systematic literature review. *Future Internet*, 15(10), 324. <https://doi.org/10.3390/fi15100324>.
5. Devi, R. (2022). Information security risk assessment (ISRA): A systematic literature review. *Journal of Information Systems Engineering and Business Intelligence*, 8(2), 207–217. <https://doi.org/10.20473/jisebi.8.2.207-217>.
6. Wang, J., Neil, M., & Fenton, N. (2020). A Bayesian network approach for cybersecurity risk assessment implementing and extending the FAIR model. *Computers & Security*, 89. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2019.101659>.
7. Naik, N., Grace, P., Jenkins, P., Naik, K., & Song, J. (2022). An evaluation of potential attack surfaces based on attack tree modelling and risk matrix applied to self-sovereign identity. *Computers & Security*, 120. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2022.102808>.
8. Piper, J. (2019). *Risk Management Framework: Qualitative Risk Assessment through Risk Scenario Analysis*. NATO Science and Technology Organization. Retrieved from: <https://www.sto.nato.int/publications/STO%20Meeting%20Proceedings/STO-MP-IST-166/MP-IST-166-07.pdf>.
9. The Open Group. (2022). *The Mathematics of the Open FAIR Methodology*. Retrieved from: <https://publications.opengroup.org/guides/open-fair/g180>.
10. Freund, J., & Jones, J. (2014). *Measuring and managing information risk: A FAIR approach*. Butterworth-Heinemann. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/387512575_Measuring_and_Managing_Information_Risk_A_FAIR_Approach.
11. The Open Group. (2021). *The Open Group Risk Analysis (O-RA) Standard*, Version 2.0.1. Retrieved from: <https://publications.opengroup.org/c20a>.
12. Hutchins, E., Cloppert, M., & Amin, R. (2011). *Intelligence-Driven Computer Network Defense Informed by Analysis of Adversary Campaigns and Intrusion Kill Chains*. Lockheed Martin Corporation. Retrieved from: <https://www.lockheedmartin.com/content/dam/lockheed-martin/rms/documents/cyber/LM-White-Paper-Intel-Driven-Defense.pdf>.
13. Department of Defense. (2012). *Standard Practice. System Safety (MIL-STD-882E)*. Retrieved from: <https://www.nde-ed.org/NDEEngineering/SafeDesign/MIL-STD-882E.pdf>.
14. Ferreira, D.J., Mateus-Coelho, N., & Mamede, H.S. (2023). Methodology for predictive cyber security risk assessment (PCSRA). *Procedia Computer Science*, 219, 1555–1563. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2023.01.447>.
15. Rybalchenko, S. A. (2013). Review of probability functions for insurance activity modeling. *Effective Economics*, (3). Retrieved from: <http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=1861>.
16. Lawless, J. (2000). Statistics in reliability. *Journal of the American Statistical Association*, 95(451), 989–992. <https://doi.org/10.1080/01621459.2000.10474291>.
17. Anderson-Cook, C.M., Morzinski, J., & Blecker, K.D. (2015). Statistical model selection for better prediction and discovering science mechanisms that affect reliability. *Systems*, 3, 109–132. <https://doi.org/10.3390/systems3030109>.

ВЕБРЕАЛІЗАЦІЯ ПОСТПРОЦЕСОРА З ВІДКРИТИМ ПОЧАТКОВИМ КОДОМ**Гоменюк С. І.**

*доктор технічних наук, професор,
декан математичного факультету
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-7340-5947
mf@znu.edu.ua*

Гребенюк С. М.

*доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-5247-9004
gsm1212@ukr.net*

Панасенко Є. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-9165-6149
panasenko.yevgeniy@gmail.com*

Ключові слова: *метод
скінченних елементів, WebGL,
візуалізація, аксонометричні
проекції, тривимірні об'єкти,
програмна реалізація,
алгоритми проектування,
моделювання.*

У роботі розглядається один із найбільш перспективних напрямів підвищення ефективності проектування сучасної техніки, а саме створення інструменту для проведення віртуального комп'ютерного експерименту замість натурних випробувань, завдяки чому істотно пришвидшується й здешевлюється процес розробки, а також забезпечується його більша безпечність.

Найчастіше на практиці для комп'ютерного моделювання широкого кола проблем використовується чисельний метод – метод скінченних елементів. Його застосування потребує наявності спеціалізованого програмного забезпечення – систем скінченно-елементного аналізу, які можуть бути умовно поділені на три основні підсистеми: 1) препроцесор (підготовка даних для розрахунку), 2) процесор (реалізація розрахунку) і 3) постпроцесор (аналіз результатів).

Практичний досвід показує, що стадія аналізу результатів (постобробка) за своєю складністю та тривалістю може значно перевищувати два попередні етапи чисельного моделювання. Саме тому від якості реалізації постпроцесора та зручності його використання користувачем напряду залежить ефективність автоматизованого проектування в машинобудуванні та будівництві.

Переважає більшість сучасних постпроцесорів є невід'ємними складовими відповідних систем скінченно-елементного аналізу (наприклад, Ansys, MSC Nastran, COMSOL та ін.). Це фактично робить неможливим їх використання спільно зі сторонніми системами, орієнтованими на розв'язання певних вузьких класів задач, наприклад механіки композитів.

Крім того, останнім часом швидкими темпами розвиваються хмарні технології, що потребує створення відповідного програмного забезпечення, реалізація якого у вигляді вебзастосунків дасть можливість досягти реальної багатоплатформності, оскільки сучасні браузері фактично є апаратно незалежними віртуальними машинами, що працюють майже на всіх типах сучасної комп'ютерної техніки. З огляду на це розробка відокремлених програмних систем для автоматизації постаналізу результатів чисельних розрахунків, отриманих у різних системах чисельного моделювання, у вигляді вебзастосунків з відкритим початковим кодом на сьогодні є актуальною задачею.

WEB IMPLEMENTATION THE POSTPROCESSOR WITH AN OPEN-SOURCE CODE

Homeniuk S. I.

*Doctor of Technical Sciences, Professor,
Dean of the Department of Mathematics
Universitetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-7340-5947
mf@znu.edu.ua*

Grebenyuk S. M.

*Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universitetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-5247-9004
gsm1212@ukr.net*

Panasenko Y. V.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universitetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-9165-6149
panasenko.yevgeniy@gmail.com*

Key words: *finite element method, WebGL, visualization, axonometric projections, three-dimensional objects, software implementation, design algorithms, modeling.*

The paper considers one of the most promising areas for increasing the efficiency of designing modern equipment, namely, creating a tool for conducting a virtual computer experiment instead of full-scale tests, which significantly speeds up and reduces the cost of the development process, as well as ensuring its greater safety. Most often in practice, the numerical finite element method is used for computer modeling of a wide range of problems. Its application requires the availability of specialized software – finite element analysis systems, which can be conditionally divided into three main subsystems: 1) preprocessor (data preparation for calculation), 2) processor (calculation implementation) and 3) postprocessor (results analysis). Practical experience shows that the stage of results analysis (postprocessing) in terms of its complexity and duration can significantly exceed the two previous stages of numerical modeling. That is why the efficiency of automated design in mechanical engineering and construction directly depends on the quality of the implementation of the postprocessor and the convenience of its use by the user. The vast majority of modern postprocessors are integral components of the corresponding finite element analysis systems (for example, Ansys, MSC Nastran, COMSOL, etc.). This actually makes it impossible to use them together with third-party systems focused on solving certain narrow classes of problems (for example, composite mechanics).

In addition, cloud technologies have been developing rapidly recently, which requires the creation of appropriate software, the implementation of which in the form of web applications will allow achieving real cross platform, since modern browsers are actually hardware-independent virtual machines that run on almost all types of modern computer technology. That is why the development of separate software systems for automating post-analysis of the results of numerical calculations obtained in various numerical modeling systems in the form of open-source web applications is currently an urgent task.

Вступ. Однією з важливих задач, які постають перед сучасним машинобудуванням, є заміна натурних випробувань дослідного зразка віртуальним комп'ютерним експериментом, за результатами якого здійснюється прогнозування поведінки об'єкта на основі виконаних чисельних розрахунків. Це дає змогу як істотно здешевити, так і пришвидшити процес проектування та створення нової техніки.

Найбільш поширеним способом реалізації комп'ютерної симуляції є використання методу скінченних елементів (МСЕ) [1]. У загальному випадку його застосування потребує використання відповідного програмного забезпечення, яке може бути поділено на три окремі підсистеми:

1) препроцесора, що автоматизує підготовку вихідних для розрахунку даних (створення геометричної моделі об'єкта розрахунку, її дискретизація на скінченні елементи (СЕ), задання крайових умов тощо);

2) процесора, який безпосередньо виконує розрахунок задачі за допомогою МСЕ;

3) постпроцесора, що автоматизує аналіз отриманих на попередньому етапі чисельних результатів.

Досвід практичного використання МСЕ показує, що стадія аналізу результатів (постобробка) за тривалістю та трудомісткістю часто може перевищувати всі попередні етапи моделювання. Саме тому від якості реалізації постпроцесора залежить не тільки зручність роботи інженера, а і якість проектування нової техніки.

У більшості випадків постпроцесори є невід'ємними складовими відповідних систем скінченно-елементного аналізу або FEA (Finite Element Analysis) [2], як-от, наприклад, Ansys [3], MSC Nastran [4], COMSOL [5] та ін. [6], що унеможлиблює їх використання спільно зі сторонніми процесорами або форматами файлів. Також слід зазначити, що стрімке поширення хмарних технологій робить актуальною задачу створення FEA-систем, які б могли працювати у вигляді вебзастосунків, що дало б змогу також досягти реальної кросплатформності, оскільки сучасні браузері фактично є апаратно-незалежними віртуальними машинами, які працюють на більшості типів сучасної комп'ютерної техніки.

Таким чином, розробка постпроцесорів з відкритим початковим кодом, які б могли бути легко адаптовані для аналізу результатів розрахунків,

отриманих сторонніми FEA-системами, і при цьому були реалізовані у вигляді вебдодатків, на сьогодні є актуальною задачею.

Постановка задачі

Загальний алгоритм проектування можна представити таким чином (рис. 1).

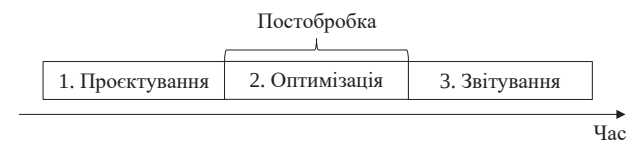


Рис. 1. Загальні стадії проектування

Спочатку створюється цифрова модель об'єкта та виконується її попередній розрахунок. На наступному етапі здійснюється аналіз отриманих результатів та в разі потреби внесення відповідних коректив у вихідну модель (оптимізація). Основною задачею постобробки є перетворення високодеталізованих результатів розрахунків – великих масивів числових даних, отриманих із застосуванням МСЕ, у зручний для розуміння людиною формат. Отримана на цій стадії досліджень інформація (проекції, графіки, діаграми, ізолінії тощо) використовується інженерами для перевірки валідності вихідної моделі, аналізу фізичної поведінки змодельованого об'єкта, а також на третьому етапі – під час створення відповідних звітів про підсумки досліджень.

Постобробка даних, отриманих з використанням МСЕ, потребує наявності спеціалізованого програмного забезпечення – постпроцесорів, використання яких можна вважати частиною інженерного принципу, заснованого на знаннях [7]. До найбільш відомих вбудованих постпроцесорів можна віднести Ansys Workbench [1, 3], Abaqus Viewer [9] та SolidWorks Simulation [10], які є невід'ємними складовими відповідних FEA-систем. Серед окремих програм можна виділити ParaView [11], TecPlot [12], MATLAB [13] та QuickField Postprocessor [14]. Крім того, для постобробки даних часто також використовують спеціалізовані бібліотеки, наприклад NumPy [15], Matplotlib [16], VTK [17] та ін. [19].

Незважаючи на велику кількість наявного програмного забезпечення, актуальність створення нових постпроцесорів зумовлена потребою в

підтримці нових спеціалізованих FEA-систем та ефективному використанні можливостей сучасних веб- та хмарних технологій.

Програмна реалізація постпроцесора

Найбільш поширеним способом постобробки результатів розрахунку є перетворення числових даних у графічні зображення, наочні для користувача. На сьогодні існує велика кількість способів візуалізації результатів розрахунку, наприклад, побудова дво- та тривимірних моделей, ізоліній, кольорових карт розподілу шуканої функції по поверхні об'єкта моделювання тощо.

Засоби побудови тривимірних сцен

Для створення тривимірних графічних сцен у вебзастосунках використовується сучасна технологія WebGL [19], яка працює спільно з вбудованою мовою програмування ECMAScript [20] у графічному елементі HTML5 Canvas. Для відображення за допомогою WebGL будь-якого об'єкта насамперед потрібно спеціалізованою мовою програмування GLSL [21] створити дві програми – вершинний і фрагментний шейдери, які вбудовуються у скрипт мовою JavaScript (яка є найбільш поширеним діалектом ECMAScript), що безпосередньо реалізують візуалізацію графічної сцени.

Вершинний шейдер фактично описує процедуру rasterization – перетворення фізичних координат об'єкта в координати екрана, в основі яких лежить побудова аксонометричних проєкцій. Задачею фрагментного (піксельного) шейдера є обчислення кольору кожного пікселя (наприклад, для врахування освітлення або інших ефектів).

Формула перетворення світових координат у координати відсікання (внутрішні координати відеадаптера, які лежать в діапазоні від -1 до +1) може бути визначена таким чином:

$$v = P \cdot s \cdot (p - c) - t,$$

де P – це матриця видового перетворення (вибирається заздалегідь залежно від типу вживаної проєкції);

p – вектор фізичних координат вершини;

c – вектор координат центру сцени;

s – вектор коефіцієнтів масштабування вздовж кожної осі координат;

t – вектор переносу (трансляції) сцени;

v – вектор екранних координат.

Відповідний вершинний шейдер для візуалізації дво- та тривимірних об'єктів розрахунку можна описати таким чином.

```
attribute vec4 a_position;
attribute vec3 a_normal;
attribute vec4 a_color;

uniform mat4 u_worldViewProjection;
uniform mat4 u_worldInverseTranspose;
```

```
uniform vec4 u_translation_center;
uniform vec4 u_translation;
uniform vec4 u_scale;
```

```
varying vec3 v_normal;
varying vec4 v_color;
```

```
void main() {
    gl_Position = u_worldViewProjection * (u_
scale * a_position -
        u_scale * u_translation_center) - u_
translation;
```

```
// Orient the normal and pass to the fragment
shader
    v_normal = mat3(u_worldInverseTranspose) *
a_normal;
    v_color = a_color;
}
```

Тут атрибути $a_position$, a_normal та a_color визначають вихідні координати, колір і вектор нормалі (відповідно), що передаються в шейдер для кожної вершини, яка оброблюється.

Фрагментний шейдер, який обчислює інтенсивність освітлення пікселя залежно від його положення, можна описати так.

```
precision mediump float;
varying vec3 v_normal; // Passed in from the
vertex shader
varying vec4 v_color;
```

```
uniform vec3 u_reverseLightDirection;
uniform vec4 u_color;
uniform int u_is_mesh;
```

```
void main() {
    float light = dot(normalize(v_normal), u_
reverseLightDirection);
    if (u_is_mesh == 0)
        gl_FragColor = v_color;
    else
        gl_FragColor = u_color;
    gl_FragColor.rgb *= abs(light);
}
```

У цьому коді слід пояснити лише таке: на основі інформації про вектор нормалі, отриманої з вершинного шейдера, обчислюється інтенсивність освітлення вершини ($light$), а потім відповідне значення кольору вершини ($gl_FragColor.rgb$) множитиметься на модуль $light$ для однакового зображення як зовнішньої, так і внутрішньої сторони поверхні. Також тут враховується необхідність використання іншого кольору для візуалізації граней CE (за ввімкнення відповідного режиму).

Алгоритм візуалізації розподілу функції по поверхні об'єкта

Для побудови кольорової карти розподілу певної функції по поверхні досліджуваного об'єкта достатньо реалізувати відповідний алгоритм для довільного трикутника, оскільки незалежно від типу вживаного СЕ будь-яку поверхню можна представити у вигляді скінченної множини трикутних межових елементів. Для візуалізації розподілу функції U по трикутному межовому елементу слід виконати його тріангуляцію на окремі трикутники, у межах яких значення функції, що досліджується, не змінюється (рис. 2).

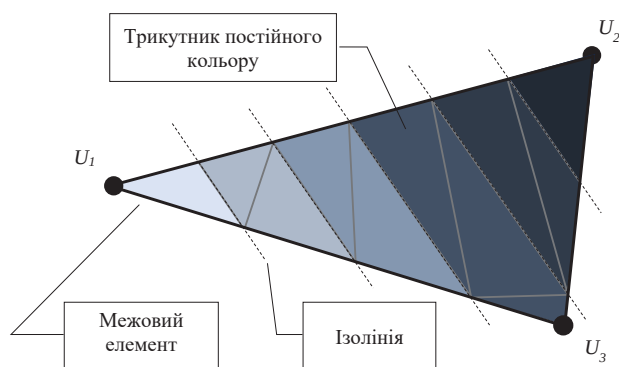


Рис. 2. Загальна схема візуалізації трикутника

З припущення, що ізолінії в межах окремого межового елемента є прямими, цей алгоритм можна описати таким чином:

1) за допомогою формули $c_j = \frac{U_j - U_{min}}{N(U_{max} - U_{min})}$ визначаються індекси кольорів у кожній вершині межового елемента (U_j – значення функції в j -й вершині трикутника, U_{min} , U_{max} – відповідно мінімальне та максимальне значення функції U по всій області,

N – кількість кольорів, що використовуються для побудови сцени);

2) якщо всі індекси рівні, то трикутник повністю замальовується кольором з відповідним індексом і алгоритм закінчується;

3) відповідно до кількості кольорових переходів між вершинами вихідного трикутника обчислюються координати відрізків, кінці яких лежать на перетинах ізоліній зі сторонами межового елемента;

4) з отриманих на попередньому кроці координат формуються й відображаються однокольорові трикутники (рис. 2), після чого алгоритм закінчує свою роботу [22].

Реалізація інтерфейсу користувача у вебсередовищі

Для реалізації графічного інтерфейсу користувача у вебзастосунку було використано JavaScript-бібліотеку з відкритим початковим кодом React [23], яка забезпечує високу швидкість роботи, є кросплатформною і такою, що легко масштабується. Крім того, за допомогою React можна створювати складні інтерфейси з маленьких ізолюваних компонентів, що дає змогу легко розширювати функціональність вебзастосунку.

За допомогою React було розроблено класові компоненти, які реалізують такі елементи графічного інтерфейсу, як канва, смуги прокрутки, радіокнопки, чекбокси тощо, що використовуються для вибору потрібного користувачеві файлу даних і налаштування різних режимів відображення сцени. Загальний інтерфейс постпроцесору, який отримав назву Mesh, наведено на рис. 3.

Mesh може візуалізувати як дво- та тривимірні скінченно-елементні сітки (у форматах Gmsh [24], Netgen [25], QFEM [26]), так і результати розрахунків, отримані в системах скінченно-елементного аналізу QFEM і MIRELA+ [27].

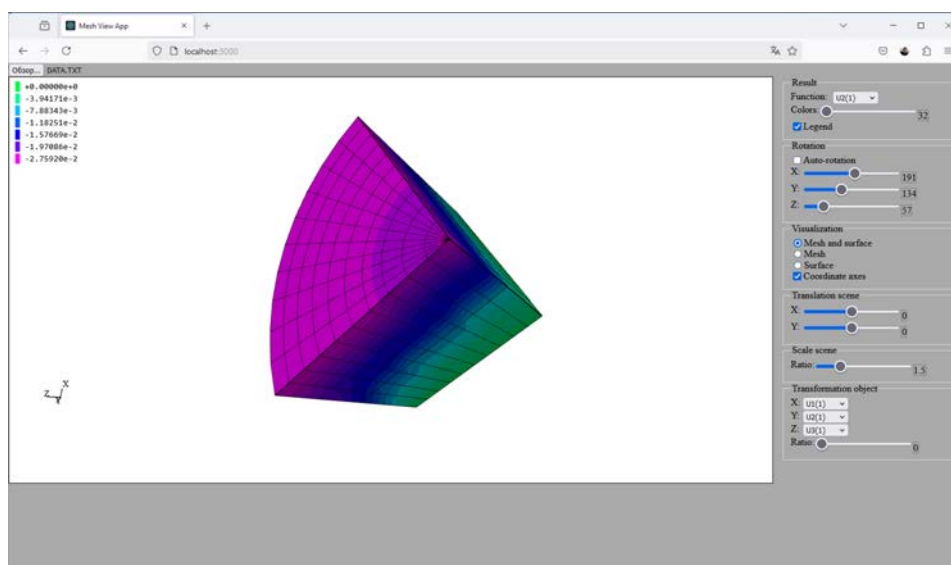


Рис. 3. Інтерфейс постпроцесора Mesh

Трансформація сцени

У Mesh користувач може вибирати для візуалізації потрібну йому функцію, а також різні режими її відображення. У поточній версії програми використовується спектральна шкала кодування. Мінімальні від'ємні значення позначаються фіолетовим кольором, нульові – зеленим, а максимальні додатні – червоним. У разі потреби користувач може змінювати кількість вживаних кольорів: від 32 до 256 (рис. 4), вмикати різні режими відображення сітки тощо.

Крім того, користувач може виконувати стандартні операції трансформації сцени: обертання, зсув і масштабування.

Для підвищення наочності користувач може також виконати трансформації безпосередньо об'єкта розрахунку, коли до координат вершин межових елементів додаються нормовані значення вибраних користувачем функцій (за усталеним налаштуванням – переміщень) (рис. 5).

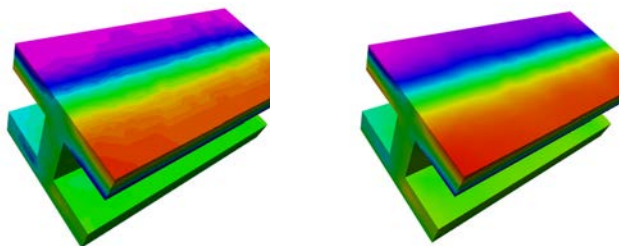


Рис. 4. Візуалізація об'єкта з використанням різної кількості кольорів

На рис. 5 наведено приклад візуалізації трансформації паливного бака літального апарата (з урахуванням симетрії розглядалася чверть конструкції)

під дією внутрішнього тиску. Для моделювання використовувалися оболонкові трикутні СЕ. Наявність поперечних ребер жорсткості моделювалася завданням товщини відповідних елементів.

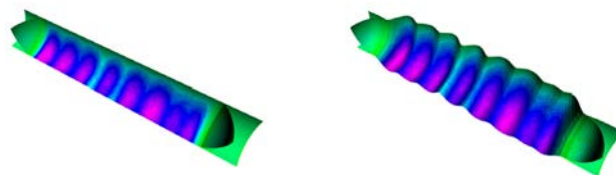


Рис. 5. Приклад відображення трансформації конструкції

Висновки. У роботі представлено програмну реалізацію постпроцесора Mesh з відкритим початковим кодом, якій можна використовувати для аналізу результатів скінченно-елементних розрахунків, отриманих із використанням низки сторонніх FEA-систем.

Головною перевагою програми Mesh порівняно з наявними аналогами є її реалізація у вигляді вебзастосунку, що робить її кросплатформною та такою, що може працювати підтримкою сучасних хмарних технологій.

Mesh надає користувачеві інтуїтивно зрозумілий графічний інтерфейс для візуалізації великих наборів даних, у тому числі за допомогою асинхронних методів обробки.

Як варіант подальшого вдосконалення Mesh передбачається розширення функціональності цього застосунку для постаналізу нестационарних задач.

Завантажити початковий код Mesh можна за посиланням [28].

ЛІТЕРАТУРА

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Sixth edition. Butterworth-Heinemann, 2016. 753 p.
2. Finite element analysis software. URL: <http://surl.li/ukbjyp> (дата звернення: 08.01.2025).
3. Engineering Simulation & 3D Design Software | Ansys. URL: <https://www.ansys.com/> (дата звернення: 08.01.2025).
4. MSC Nastran – Multidisciplinary Structural Analysis. URL: <http://surl.li/schezo> (дата звернення: 08.01.2025).
5. COMSOL Multiphysics® Modelling Software. URL: <https://www.comsol.com/> (дата звернення: 08.01.2025).
6. Best Open-Source Finite Element Analysis Software. URL: <http://surl.li/vmblnr> (дата звернення: 08.01.2025).
7. Lee J.Y., Ahn S.Y. Interactive visualization of elasto-plastic behavior through stress paths and yield surfaces in finite element analysis. URL: <http://surl.li/vmrnkm> (дата звернення: 09.01.2025).
8. Ansys Workbench | Simulation Integration Platform. URL: <http://surl.li/sjkenb> (дата звернення: 09.01.2025).
9. Abaqus/CAE. URL: <http://surl.li/ketspv> (дата звернення: 09.01.2025).
10. SOLIDWORKS Simulation. URL: <http://surl.li/iawbud> (дата звернення: 09.01.2025).
11. ParaView – Open-source, multi-platform data analysis and visualization application. URL: <https://www.paraview.org/> (дата звернення: 09.01.2025).
12. Tecplot Visualization and Analysis Tools for CFD Post-processing. URL: <https://tecplot.com/> (дата звернення: 09.01.2025).

13. MATLAB – MathWorks. URL: <http://surl.li/nnrxpk> (дата звернення: 09.01.2025).
14. QuickField Postprocessor. URL: <https://quickfield.com/post.htm> (дата звернення: 09.01.2025).
15. NumPy. URL: <https://numpy.org/> (дата звернення: 09.01.2025).
16. Matplotlib – Visualization with Python. URL: <https://matplotlib.org/> (дата звернення: 09.01.2025).
17. VTK – The Visualization Toolkit. URL: <https://vtk.org/> (дата звернення: 09.01.2025).
18. The PyVista Project. URL: <https://pyvista.org/> (дата звернення: 10.01.2025).
19. WebGL Overview – The Khronos Group Inc. URL: <https://www.khronos.org/webgl/> (дата звернення: 10.01.2025).
20. Home – Ecma International. URL: <https://ecma-international.org/> (дата звернення: 10.01.2025).
21. WebGL Fundamentals. URL: <https://webglfundamentals.org/> (дата звернення: 10.01.2025).
22. Гнєздовський О. В. Відкрита об'єктно-орієнтована архітектура систем скінченно-елементного аналізу : дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки». Запорізький національний університет, Запоріжжя, 2023. 124 с.
23. React. URL: <https://react.dev/> (дата звернення: 18.01.2025).
24. A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. URL: <https://gmsh.info/> (дата звернення: 19.01.2025).
25. Netgen/NGSolve. URL: <https://ngsolve.org/> (дата звернення: 19.01.2025).
26. QFEM – Simple FEM Solver. URL: <http://surl.li/eikjdv> (дата звернення: 19.01.2025).
27. Гоменюк С. І., Козуб В. Ю. Особливості використання паралельних обчислень в пакеті прикладних програм «МІРЕЛА+». *Вісник Хмельницького національного університету*. 2022. № 6. Т. 2. С. 60–64.
28. Mesh. URL: <https://surl.li/vnpczu> (дата звернення: 31.01.2025).

REFERENCES

1. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z. (2016). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Sixth edition. Butterworth-Heinemann, 753 p.
2. Finite element analysis software. URL: <http://surl.li/ukbjyp> (accessed 08.01.2025).
3. Engineering Simulation & 3D Design Software | Ansys. URL: <https://www.ansys.com/> (accessed 08.01.2025).
4. MSC Nastran – Multidisciplinary Structural Analysis. URL: <http://surl.li/schezo> (accessed 08.01.2025).
5. COMSOL Multiphysics ® Modelling Software. URL: <https://www.comsol.com/> (accessed 08.01.2025).
6. Best Open-Source Finite Element Analysis Software. URL: <http://surl.li/vmblnr> (accessed 08.01.2025).
7. Lee, J.Y., Ahn, S.Y. Interactive visualization of elasto-plastic behavior through stress paths and yield surfaces in finite element analysis. URL: <http://surl.li/vmrnkm> (accessed 09.01.2025).
8. Ansys Workbench | Simulation Integration Platform. URL: <http://surl.li/sjkenb> (accessed 09.01.2025).
9. Abaqus/CAE. URL: <http://surl.li/ketspv> (accessed 09.01.2025).
10. SOLIDWORKS Simulation. URL: <http://surl.li/iawbud> (accessed 09.01.2025).
11. ParaView – Open-source, multi-platform data analysis and visualization application. URL: <https://www.paraview.org/> (accessed 09.01.2025).
12. Tecplot Visualization and Analysis Tools for CFD Post-processing. URL: <https://tecplot.com/> (accessed 09.01.2025).
13. MATLAB – MathWorks. URL: <http://surl.li/nnrxpk> (accessed 09.01.2025).
14. QuickField Postprocessor. URL: <https://quickfield.com/post.htm> (accessed 09.01.2025).
15. NumPy. URL: <https://numpy.org/> (accessed 09.01.2025).
16. Matplotlib – Visualization with Python. URL: <https://matplotlib.org/> (accessed 09.01.2025).
17. VTK – The Visualization Toolkit. URL: <https://vtk.org/> (accessed 09.01.2025).
18. The PyVista Project. URL: <https://pyvista.org/> (accessed 10.01.2025).
19. WebGL Overview – The Khronos Group Inc. URL: <https://www.khronos.org/webgl/> (accessed 10.01.2025).
20. Home – Ecma International. URL: <https://ecma-international.org/> (accessed 10.01.2025).
21. WebGL Fundamentals. URL: <https://webglfundamentals.org/> (accessed 10.01.2025).
22. Hniedzovskyi, O.V. (2023). *Vidkryta ob'ektno-oriientovana arkhitektura system skinchenno-elementnoho analizu [Open object-oriented architecture of finite element analysis systems]. Doctor's thesis*. Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia. 124 p. [in Ukrainian].
23. React. URL: <https://react.dev/> (accessed 18.01.2025).
24. A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. URL: <https://gmsh.info/> (accessed 19.01.2025).
25. Netgen/NGSolve. URL: <https://ngsolve.org/> (accessed 19.01.2025).
26. QFEM – Simple FEM Solver. URL: <http://surl.li/eikjdv> (accessed 19.01.2025).
27. Homeniuk, S.I., Kozub, V.Yu. (2022). *Osoblyvosti vykorystannia paralelnykh obchyslen v paketi prykladnykh prohram "MIRELA+" [Peculiarities of using parallel computing in the package of applied programs "MIRELA+"]. Bulletin of Khmelnytsky National University*, 6 (2), 60–64 [in Ukrainian].
28. Mesh. URL: <https://surl.li/vnpczu> (accessed 31.01.2025).

UDC 004.8

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-13>

OPTIMIZING OBJECT DETECTION PERFORMANCE THROUGH IMAGE ENHANCEMENT FOR BEE IMAGES

Zhukov O. O.

*Assistant at the Department of Electronics, Information Systems and Software
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0009-0004-3683-2527
oleksanrei@gmail.com*

Horbenko V. I.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orchid.org/0000-0002-3342-4841
vgorbenko@ukr.net*

Key words: *neural networks,
clahe, ssd, tensorflow, bee hive,
histogram equalization.*

Neural networks and deep learning, being among the technologies experiencing daily growing interest, have found practical application, particularly in bee monitoring. The use of neural networks for identifying bees in images can provide non-invasive monitoring of the condition of individual bees and, consequently, reduce stress on the colony. However, the accuracy of object detection algorithms can be significantly affected by variations in monitoring conditions, such as weather conditions, lighting, or the use of different cameras. Thus, image enhancement can be an important pre-processing step for optimizing object detection algorithms. This study utilizes various image enhancement and color normalization methods to improve the performance of the SSD MobileNet model in detecting the full bodies of bees in images. The data source consists of photos taken with a smartphone, which were subsequently divided into sections to fit within the model's acceptable identification limits. The study examines the effectiveness of three image enhancement methods: Contrast Limited Adaptive Histogram Equalization (CLAHE), a regular histogram equalization algorithm, and Protobuf pipeline functions. Each approach is evaluated on different image sets, including photos of normal beehive sections taken with a smartphone, photos with randomly altered brightness and contrast, and photos with slight blurring. The findings show that image normalization alone does not improve object detection performance on standard bee photos, whereas the CLAHE algorithm proved most effective in other cases, maintaining good results when image brightness and contrast were not optimized. Additionally, it was found that applying blur did not result in an overall increase in the efficiency of identifying bees in photos.

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОДУКТИВНОСТІ ВИЯВЛЕННЯ ОБ'ЄКТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОКРАЩЕННЯ ЗОБРАЖЕННЯ ДЛЯ ФОТО БДЖІЛ

Жуков О. О.

*асистент кафедри електроніки, інформаційних систем
та програмного забезпечення
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0009-0004-3683-2527
oleksanrei@gmail.com*

Горбенко В. І.

*кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orchid.org/0000-0002-3342-4841
vgorbenko@ukr.net*

Ключові слова: нейронні мережі, clahe, ssd, tensorflow, бджолиний вулик, вирівнювання гістограм.

Нейронні мережі та глибоке навчання як технології, інтерес до яких з кожним днем зростає, знайшли практичне застосування, зокрема, у моніторингу бджіл. Використання нейронних мереж для ідентифікації бджіл на зображенні можуть забезпечити неінвазивний моніторинг стану окремих бджіл і, як наслідок, зменшити стрес на колонію. Проте на точність алгоритмів виявлення об'єктів можуть значно вплинути варіації умов моніторингу, як-от погодні умови, освітлення або використання різних камер. Таким чином, покращення зображення може бути важливим етапом попередньої обробки для оптимізації алгоритмів виявлення об'єктів. У цьому дослідженні використовуються різноманітні методи покращення зображення та нормалізації кольору, щоб покращити продуктивність моделі SSD MobileNet у виявленні повних тіл бджіл на зображеннях. Як джерела даних виступають фотографії зроблені на смартфон, які далі були розділені на секції з метою вкладання в допустимі ліміти ідентифікації моделі. У дослідженні розглядається ефективність трьох методів покращення зображення: CLaNE, регулярного алгоритму вирівнювання гістограми та функцій конвеєра Protobuf. Кожен підхід оцінюється на різних наборах зображень, включно з фотографіями звичайних секцій бджолиного вулика, знятих на смартфон, фотографіями з довільно зміненою яскравістю та контрастністю та фотографіями з легким розмиттям. Висновки показують, що нормалізація зображення сама по собі не покращує продуктивність виявлення об'єктів на звичайних фотографіях бджіл, тоді як алгоритм CLaNE виявився найефективнішим в інших випадках, зберігаючи хороші результати у випадках, коли яскравість і контраст зображення не були оптимізовані. Також було виявлено, що застосування розмиття не дало загального приросту в ефективності ідентифікації бджіл на фото.

Introduction. Bee monitoring has emerged as a significant area of interest due to the paramount importance of bees in the ecosystems they inhabit and their integral role in global food production. As quintessential pollinators, bees play a pivotal role in the sustenance of biodiversity and the stability of agricultural systems upon which we depend for a substantial

portion of our food production [1; 2]. Alarming, the phenomena of Colony Collapse Disorder (CCD) and various health afflictions such as varroa mites have placed bee populations at substantial risk [3; 4].

Given the impracticality of continuous manual hive inspection, which may also introduce stress to the bees, automated, non-intrusive monitoring meth-

ods are important. One of the ways to monitor a bee hive is the usage of photo-video feed from the hive and using neural networks to process it and identify bees. Successful detection of bees in images can lead to further identification of the hive's state, providing valuable insights about bee quantity and traffic, varroa mite detection, and information about pollen that bees carry. However, the precision of object detection algorithms can be significantly impacted by variations in monitoring conditions, such as different cameras or lighting conditions [5]. Thus, image enhancement could be an important pre-processing step to optimize object detection algorithms. This paper aims to address this concern by exploring methodologies to enhance bee images, therefore increasing the quality of the end result of the object detection task for different bee images.

Literature Review. The application of neural networks for beehive monitoring has recently gained traction in the domain of bee studies. For instance, this paper [6] showcased how Object Recognition and real-time feed from webcams can be used for tracking bee traffic. Other research showed that the usage of neural networks can detect varroa mite on bees with an accuracy of 70% [7]. On the other hand, this research [8] shows the effectiveness of applying image filters to increase the Image Classification performance on the task of detecting pollen on a bee.

Optimization Adaptive Histogram Equalization (AHE) stands out as a noteworthy image enhancement technique for object detection. Studies like this paper [9] show that using Adaptive Histogram Equalization with an image sharpening algorithm can improve the performance of the Object Detection task in low-light images.

A variant of AHE, Contrast Limited Adaptive Histogram Equalization (CLAHE) has gained popularity due to its controlled approach to histogram equalization. This study [10] successfully utilized CLAHE to improve object detection results on various images, especially ones with shadows or low-contrast areas.

Several other studies managed to successfully use CLAHE in their neural networks pipeline. In a study which set to determine the effects of data augmentation on the CNN-based identification of bee infection, authors managed to successfully use CLAHE to enhance the contrast on foggy bee images, which made them more understandable and led to the better CNN classification results [11]. This other study on honeycomb detection and classification using deep learning has also showed positive results when using CLAHE, as it allowed honeycomb edges to be more distinctive [12].

Materials and Methods. As a data source for the Dataset, photos taken on a Samsung A20 were used. Since model-of-choice by default supports up to 100 detections and some of the photos of the size

of 4128 x 3096 pixels contained up to 200 individual bees, it was decided to split images into 4 separate parts for their further use. These parts were annotated manually using the Remo software [13]. During the annotation process, only individual bee bodies were selected, and zones containing only a head or a spine were ignored. After that, 20% of the pictures went to the test set, and the others were used in training and evaluation sets. Figure 1 offers examples of cropped zones from the original dataset images that have been used for training.

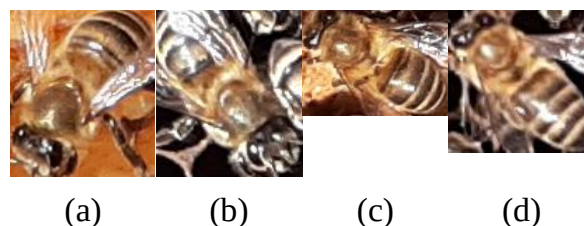


Fig. 1. Cropped annotated bee images that were used for training

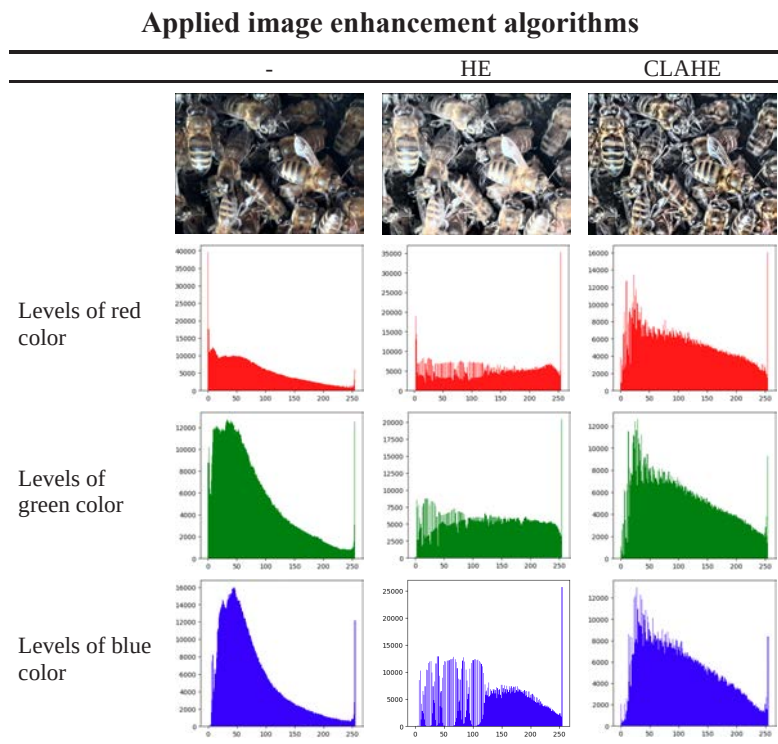
Based on the initial evaluation set, three other ones were created: one was created with “corrupted” images, where brightness and contrast were randomly changed in a range of $\pm 20\%$ and ± 0.5 accordingly, one with a slight Gaussian blur, and one with the blur applied to the corrupted set.

Blurred datasets were taken into account since it is a common way to reduce camera noise on images, which may appear in low-light photos and impact the overall performance of the model. Since the addition of too much blur to the image could make bee detection harder even with a bare eye, the blur was applied using OpenCV's instruments with (3.3) parameters.

For the training, two image enhancement techniques were used: the regular histogram equalization algorithm and CLAHE. Histogram Equalization (HE) is a method to increase the contrast by making the histogram of the image uniform. HE operates on the entire image, thereby globally enhancing contrast which can be advantageous for images with backgrounds and foregrounds that are both dark or both light. Although this method is simple and effective, it can cause color distortion or noise due to changes in the average brightness of the image or excessive contrast increase [14; 15].

Diverging from the global nature of traditional histogram equalization, Contrast Limited Adaptive Histogram Equalization (CLAHE) operates by dividing the image into smaller tiles and then individually equalizing each tile's histogram [16]. By focusing on smaller regions, CLAHE can better address variations in brightness and enhance local contrast, making it particularly suitable for images with varying backgrounds [17]. The performance of CLAHE heavily

Table 1



depends on its parameters, including the block size and the contrast limit, necessitating fine-tuning for optimal results. In this work, CLAHE was applied using OpenCV's instruments, with (8,8) parameters since based on visual inspection, it gave the optimal results between improved contrast and distortion.

An example of image enhancement application is shown in Table 1. On sample image, both algorithms had spread color levels more evenly, while both CLAHE and Histogram Equalization algorithm made the image brighter, CLAHE did a better job in preserving details.

The SSD MobileNet V2 model was chosen from the TensorFlow 2 Model Zoo repository. Among the other models in the repository, this model stood out for its fast time per detection of 19 milliseconds and its expected input resolution of 320 x 320 pixels, which is good for detecting small objects such as bees in an image. In addition to that, all labeled bounding boxes from the original dataset are in the range of 320 x 320 pixels resolution. Also, usage of SSD model architecture has been proven to yield positive results in terms of identifying bees on image [18].

This model accommodates two architectures – SSD and MobileNet.

The main idea behind SSD architecture is that the network uses only one pass through an image to identify the objects and classify them. Figure 2 shows the structure of the Single-Shot Detector architecture.

The key feature of this architecture is employing multiscale of convolutional frame exits which are connected to a set of feature arrays at the upper part of the neural network. Such a way allows to model potential frame spots efficiently [19].

MobileNet V2 is a deep learning network designed to function on mobile devices and to provide high accuracy of image classification with the least possible model size and number of operations. The main idea of MobileNet V2 lies in designing a light and fast neural network architecture with the help of two key technologies, which are residual connections and inverted residuals. Residual connections are a type

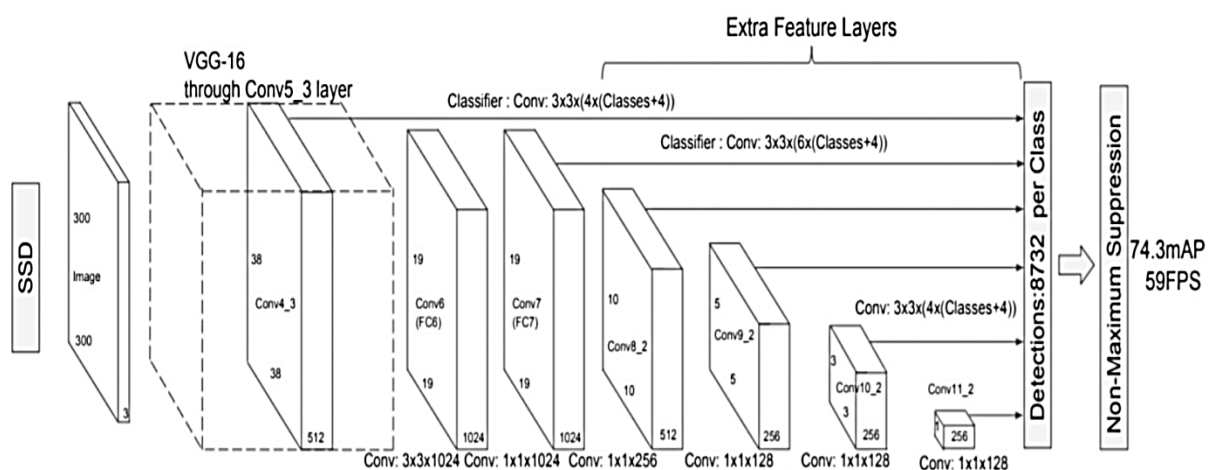


Fig. 2. Single-Shot Detection model architecture

of technology that allows transmitting information immediately from previous layers to the next ones which helps avoid the problem of studying shallow functions and provides a more efficient training of the neural network. Inverted residuals are a technology that allows decreasing the numbers of network parameters by reducing the size of layers and using their increase by applying 1x1 convolutions and linear layers [20].

To evaluate the performance of the applied object detection model, this paper used images that were not included in the original training and test datasets. In object detection approaches, the detection result and the classifier performance are two main indexes to evaluate the performance of the models. For each evaluation, following metrics were measured: Intersection over Union (IOU), recall, precision, and F1 score.

Precision measures what percentage of correctly classified labels is truly positive and uses True Positive (TP) and False Negative (FN) values to calculate it.

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP}; \quad (1)$$

High precision indicates that the model is reliable in its positive predictions, making few false positive errors. However, precision alone does not account for all relevant aspects of a model's performance, particularly its ability to identify all positive cases in the dataset.

Recall, also known as sensitivity, is a metric that measures what proportion of True Positives out of all objects of the positive class the neural algorithm found

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP + FN}; \quad (2)$$

A high recall indicates that the model is effective in capturing a large proportion of positive cases, but it does not indicate how many negative cases were incorrectly classified as positive.

Intersection over Union (IoU) metric is used to evaluate the performance of object detection by comparing the ground truth bounding box to the predicted bounding box. The general mean IoU metric was calculated for each evaluation set by calculating it for each individual image, and divided by the evaluation images count.

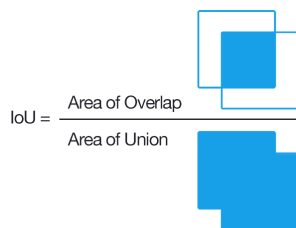


Fig. 3. Graphical representation of Intersection Over Union (IOU) (Source: Adrian Rose- brock/ Creative Commons)

The F1 score represents the harmonic mean of precision and recall, thereby integrating both metrics into a single figure. A higher F1 score illustrates that the model is more robust.

$$F1 = 2 \times \frac{\text{Precision} \times \text{Recall}}{\text{Precision} + \text{Recall}}; \quad (3)$$

The training and evaluation process unfolds a sequence of structured steps. Initially, input images are pre-processed, which includes applying image enhancement techniques as required to prepare the input data. Similarly, evaluation data undergo a pre-processing phase that may also encompass image enhancement to ensure consistency with the training data conditions. Following these preparatory steps, the dataset is transformed into two TFRecord files, which serve as the foundation for the training and validation processes. After it, the model is trained using Tensorflow Object Detection API instruments with the prepared training and testing input data.

Each model was trained for 22000 epochs with 112 batch size parameter. In addition to the HE-based and CLAHE-based models, a model which utilized Protobuf's pipeline features was added. For this pipeline, following data augmentation methods were used:

- Hue adjustment, which randomly alters hue by a value of up to 0.02.
- Saturation adjustment, which randomly changes saturation by a value between 0.8 and 1.25.
- Contrast adjustment, which randomly scales contrast by a value between 0.8 and 1.25.
- Brightness adjustment, which randomly changes image brightness by a value between 0.8 and 1.2.

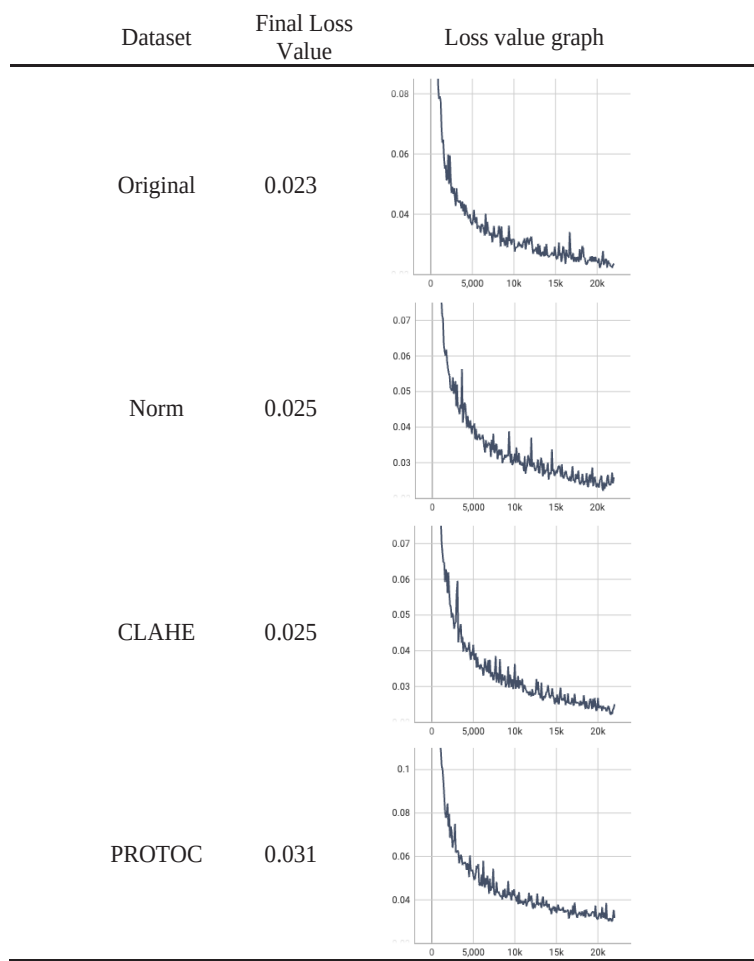
These were applied to a random images during the model training to the input data, and no image enhancement algorithm was applied to them beforehand.

When training was finished, each model was evaluated on the according set of images and the mean IoU metric was calculated for them. Additionally, a manual assessment is conducted to verify the True Positives and False Negatives and to gather other relevant metrics. Only detections with a confidence score over 50% were taken into account during the evaluation process.

All models were trained using a Google Colab Pro high-RAM instance with a GPU accelerator, following the recommended training procedures. Table 2 shows the loss value and the progression of it during training of the models.

For model training, the cosine decay learning rate strategy was used, providing an adaptive adjustment of the learning rate over time. This approach follows a cosine curve to decrease the learning rate from an initial high value to near zero, facilitating both rapid exploration of the solution space and fine-tuning of model parameters. Since cosine decay learning rate depends on the initial learning rate value and the

Table 2

Loss values and their progression during training

number of steps, which was identical for all models, the learning rate value progression is exactly the same for all 4 trained models, as shown on the Figure 4.

Results and Discussion. Based on the results from Table 3, adding Image Enhancement techniques didn't increase the end recall and precision results. On the other hand, even though dataset with CLAHE algorithm applied didn't show the best result, its precision and recall are similar to the original dataset.

Upon further investigation, IoU metric didn't show meaningful results in this particular task because there were a lot of detected zones that overlapped with each other, and, additionally, it was affected by the false positive results which were also heavily overlapping with the expected bounding boxes in zones with lots of bees present. Adding blur to the images also didn't show an increase in results.

Based on the data presented in Table 3, in the case of the corrupt dataset scenario, CLAHE showed the best results in successfully detecting bees.

Table 5 shows the object detection result in one of the evaluation images with CLAHE algorithm applied.

Table 3

Regular dataset performance results

	Regular				Regular + Blur			
	Rec.	Prec.	IoU	F1	Rec	Prec	IoU	F1
Original	81.8%	90%	0.562	0.857	74.4%	90.0%	0.581	0.815
Norm	71%	85%	0.600	0.774	61.2%	89.0%	0.583	0.725
CLAHE	79.9%	87.0%	0.577	0.833	76.1%	90.0%	0.606	0.825
PROTOC	62.3%	86.0%	0.603	0.723	56.6%	87.0%	0.616	0.686

Table 4

"Corrupt" dataset performance results

	Corrupt				Corrupt + Blur			
	Rec.	Prec.	IoU	F1	Rec	Prec	IoU	F1
Original	70.6%	92.0%	0.537	0.799	63.6%	91.0%	0.591	0.749
Norm	60.2%	90.0%	0.535	0.721	54.0%	89.0%	0.522	0.672
CLAHE	80.5%	89.0%	0.557	0.845	70.8%	89.0%	0.590	0.789
PROTOC	62.9%	87.0%	0.576	0.730	55.7%	84.0%	0.621	0.670

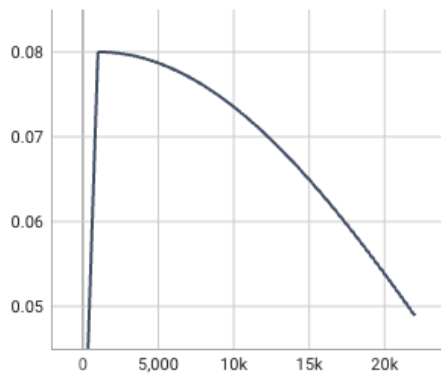


Fig. 4. Learning rate progression over training steps graph

Conclusions. The main goal of the current study was to determine whether using image enhancement algorithms can lead to better object detection results. The results of this investigation show that using HE and CLAHE algorithms have not increased the precision of the object detection model in general. Another major finding is that usage of CLAHE algorithm may lead to more stable results in various lighting conditions and small defects in image coloring. However, using HE, blur, and data augmentation features of Protobuf pipeline did not show significant results in either test.

Further research might explore the possibilities of using not only the image normalization techniques, but also applying color filters. An issue that was not explored in this study is the appearance of camera noise in low light environment, so reviewing the models' performance and ways to counter the noise can be a subject for further investigation.

Table 5

Object detection results

Dataset	Resulting Image
Original	
Original + Blur	
Corrupt	
Corrupt + Blur	

REFERENCES

- Dicks, L.V., Breeze, T.D., Ngo, H.T., Senapathi, D., An, J., Aizen, M.A., Basu, P., Buchori, D., Galetto, L., Garibaldi, L.A., Gemmill-Herren, B., Howlett, B.G., Imperatriz-Fonseca, V.L., Johnson, S.D., Kovács-Hostyánszki, A., Kwon, Y.J., Lattorff, H.M.G., Lungharwo, T., Seymour, C.L., . . . Potts, S.G. (2021). A global-scale expert assessment of drivers and risks associated with pollinator decline. *Nature Ecology & Evolution*, 5 (10), 1453–1461. <https://doi.org/10.1038/s41559-021-01534-9>.
- Potts, S.G., Biesmeijer, J.C., Kremen, C., Neumann, P., Schweiger, O., & Kunin, W.E. (2010). Global pollinator declines: trends, impacts and drivers. *Trends in Ecology & Evolution*, 25 (6), 345–353. <https://doi.org/10.1016/j.tree.2010.01.007>.
- Neov, B., Shumkova, R., Palova, N., & Hristov, P. (2021). The health crisis in managed honey bees (*Apis mellifera*). Which factors are involved in this phenomenon? *Biologia*, 76 (8), 2173–2180. <https://doi.org/10.1007/s11756-021-00684-2>.
- Rosenkranz, P., Aumeier, P., & Ziegelmann, B. (2010). Biology and control of *Varroa destructor*. *Journal of Invertebrate Pathology*, 103, S96–S119. <https://doi.org/10.1016/j.jip.2009.07.016>.
- Ito, K., Higashi, H., Hietanen, A., Fält, P., Hine, K., Hauta-Kasari, M., & Nakauchi, S. (2022). The optimization of the light-source spectrum utilizing neural networks for detecting oral lesions. *Journal of Imaging*, 9 (1), 7. <https://doi.org/10.3390/jimaging9010007>.
- Ryu, J.-S., Jung, J.-W., Jeong, C.-H., Choi, B.-J., Lee, M.-L., & Kwon, H.W. (2021). Honeybee in-out monitoring system by object recognition and tracking from real-time webcams. *Han'gug Yangbong Haghoeji [Apicultural Society of Korea]*, 36 (4), 273–280. <https://doi.org/10.17519/apiculture.2021.11.36.4.273>.

7. Voudiotis, G., Moraiti, A., & Kontogiannis, S. (2022). Deep learning beehive monitoring system for early detection of the Varroa mite. *Signals*, 3 (3), 506–523. <https://doi.org/10.3390/signals3030030>.
8. Braga, D., Madureira, A., Scotti, F., Piuri, V., & Abraham, A. (2021). An intelligent monitoring system for assessing bee hive health. *IEEE Access: Practical Innovations, Open Solutions*, 9, 89009–89019. <https://doi.org/10.1109/access.2021.3089538>.
9. Guo, H., Lu, T., & Wu, Y. (2021). Dynamic low-light image enhancement for object detection via end-to-end training. 2020 25th International Conference on Pattern Recognition (ICPR).
10. Wang, T.-S., Kim, G. T., Kim, M., & Jang, J. (2023). Contrast enhancement-based preprocessing process to improve deep learning object task performance and results. *Applied Sciences* (Basel, Switzerland), 13 (19), 10760. <https://doi.org/10.3390/app131910760>.
11. Kaur, M., Ardekani, I. T., Sharifzadeh, H., & Varastehpour, S. (2022). A CNN-Based Identification of Honeybees' Infection using Augmentation. 2022 International Conference on Electrical, Computer, Communications and Mechatronics Engineering (ICECCME). <https://doi.org/10.1109/iceccme55909.2022.9988275>.
12. Alves, T.S., Pinto, M.A., Ventura, P., Neves, C.J., Biron, D.G., Cândido, A., De Paula Filho, P.L., & Rodrigues, P. (2020). Automatic detection and classification of honey bee comb cells using deep learning. *Computers and Electronics in Agriculture*, 170, 105244. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2020.105244>.
13. Remo Remo.ai. Available at: <https://github.com/rediscovery-io/remo-python> (Accessed: January 20, 2024).
14. Hum, Y.C., Lai, K.W., & Mohamad Salim, M.I. (2014). Multiobjectives bihistogram equalization for image contrast enhancement. *Complexity*, 20 (2), 22–36. <https://doi.org/10.1002/cplx.21499>.
15. Chen Soong Der and Sidhu, M.S. (2009). Re-evaluation of Automatic Global Histogram Equalization-based Contrast. *eJCSIT – Electronic Journal of Computer Science & Information Technology*, 1, 13–17.
16. Zuiderveld, K. (1994). Contrast limited adaptive histogram equalization. In P.S. Heckbert (Ed.), *Graphics Gems* (pp. 474–485). Elsevier.
17. Reza, A.M. (2004). Realization of the contrast limited adaptive histogram equalization (CLAHE) for real-time image enhancement. *The Journal of VLSI Signal Processing Systems for Signal Image and Video Technology*, 38 (1), 35–44. <https://doi.org/10.1023/b:vlsi.0000028532.53893.82>
18. Cai, J., Makita, Y., Zheng, Y., Takahashi, S., Hao, W., & Nakatoh, Y. (2022). Single shot multibox detector for honeybee detection. *Computers & Electrical Engineering*, 104, 108465. <https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2022.108465>.
19. Liu, W., Anguelov, D., Erhan, D., Szegedy, C., Reed, S., Fu, C.-Y., & Berg, A.C. (2015). SSD: Single Shot MultiBox Detector. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1512.02325>.
20. Sandler, M., Howard, A., Zhu, M., Zhmoginov, A., & Chen, L.-C. (2018). MobileNetV2: Inverted residuals and linear bottlenecks. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1801.0438>.

УДК 004.722.45:621.396.946]:[528.85:69]
DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2025-1-14>

АРХІТЕКТУРА СИСТЕМ ПОЗИЦІОНУВАННЯ ОБ'ЄКТІВ НА БУДІВЕЛЬНИХ МАЙДАНЧИКАХ

Лебедєва-Дичко А. С.

аспірант кафедри комп'ютерних наук

Запорізький національний університет

вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна

orcid.org/0009-0003-1931-1861

ldas.1405@gmail.com

Ключові слова: зонування території, якість сигналу, точність координат об'єктів, супутникові технології, UWB, Wi-Fi, обробка та візуалізація даних, база даних, позиціонування у реальному часі.

У статті пропонується архітектура системи позиціонування об'єктів на будівельних майданчиках, де динамічно змінюється конфігурація простору. Розроблено гібридну систему, що інтегрує супутникову (GPS або Starlink) та дві локальні технології (UWB, Wi-Fi) для забезпечення оптимального співвідношення заданої точності, надійності позиціонування об'єктів у реальному часі та мінімальної вартості.

Для підвищення надійності системи запропоновано підхід, що ґрунтується на зонуванні території будівельного майданчика за рівнем критичності, що дає змогу адаптувати систему позиціонування залежно від умов середовища. У зонах із високою критичністю використовується комбінація трьох технологій, що забезпечує точність до 50 см навіть за наявності металевих перешкод. У середньокритичних зонах доцільним є поєднання двох технологій, вибір яких залежить від конфігурації майданчика. У зонах низької критичності (відкриті простори без значних перешкод) використовується одна з доступних технологій залежно від умов покриття. Архітектура має чотири рівні. На першому рівні здійснюється збір інформації від сенсорів і модулів супутникового зв'язку. Другий рівень відповідає за обробку отриманих даних, фільтрацію шумів і корекцію похибок, що реалізується за допомогою фільтра Калмана. Третій рівень виконує збереження інформації, що організовується за допомогою багаторівневої системи, включно з оперативним, довготривалим та архівним сховищами. Це дає змогу зберігати й аналізувати поточні та історичні дані, забезпечуючи можливість прогнозування руху об'єктів і підвищення ефективності логістики. Четвертий рівень забезпечує інтеграцію системи в загальну інфраструктуру управління, даючи можливість операторам здійснювати моніторинг об'єктів у реальному часі, прогнозувати можливі відхилення.

Запропонована архітектура дає змогу налаштовувати та масштабувати систему з огляду на особливості будівельного майданчика, зважаючи на складність середовища, критичність зон і вимоги до точності позиціонування. З використанням адаптивного зонування можна ефективно розподіляти технології позиціонування, забезпечуючи баланс між точністю, надійністю й економічною доцільністю.

ARCHITECTURE OF POSITIONING SYSTEMS FOR OBJECTS ON CONSTRUCTION SITES

Lebedieva-Dychko A. S.

Postgraduate Student at the Department of Computer Science

Zaporizhzhia National University

Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine

orcid.org/0009-0003-1931-1861

ldas.1405@gmail.com

Key words: *territory zoning, signal quality, accuracy of object coordinates, satellite technologies, UWB, Wi-Fi, data processing and visualisation, database, real-time positioning.*

The article proposes the architecture of a system for positioning objects on construction sites where the space configuration is dynamically changing. A hybrid system has been developed that integrates satellite (GPS or Starlink) and two local technologies (UWB, Wi-Fi) to ensure the optimal ratio of the specified accuracy, reliability of real-time positioning of objects and minimum cost.

To improve the system's reliability, an approach based on zoning the construction site by the level of criticality is proposed, which allows the positioning system to adapt to the environment. In areas of high criticality, a combination of three technologies is used to ensure accuracy of up to 50 cm even in the presence of metal obstacles. In medium-critical areas, a combination of two technologies is advisable, the choice of which depends on the site configuration. In low-criticality areas (open spaces without significant obstacles), one of the available technologies is used depending on the coverage conditions.

The architecture includes four levels. The first level collects information from sensors and satellite communication modules. The second level is responsible for processing the received data, filtering noise and correcting errors, which is implemented using a Kalman filter. The third tier is responsible for storing information, which is organised through a multi-level system, including operational, long-term and archival storage. This allows you to store and analyse current and historical data, providing the ability to predict the movement of objects and improve logistics efficiency. The fourth level ensures the integration of the system into the overall management infrastructure, allowing operators to monitor facilities in real time and predict possible deviations.

The proposed architecture allows the system to be customised and scaled to suit the specifics of the construction site, taking into account the complexity of the environment, criticality of areas and positioning accuracy requirements. The use of adaptive zoning allows for the efficient distribution of positioning technologies, ensuring a balance between accuracy, reliability and economic feasibility.

Вступ. В умовах стрімкого технологічного розвитку питання точного позиціонування об'єктів стає дедалі актуальнішим, особливо в будівельних зонах, де безпека й ефективність виконання робіт є пріоритетними завданнями. Системи позиціонування дають змогу не лише контролювати місцезнаходження об'єктів, а й мінімізувати ризики аварійних ситуацій, оптимізувати процеси та забезпечувати ефективне управління ресурсами.

Основні критерії ефективності систем позиціонування – точність, надійність та економічність. У контрольованих умовах багато сучасних технологій демонструють високу точність визначення координат об'єктів. Однак на майданчиках зі змінною конфігурацією простору, як-от будівельні майданчики, кар'єри, нафтові платформи або про-

мислові об'єкти, використання однієї технології виявляється недостатньо ефективним.

Динамічні зміни ландшафту, встановлення тимчасових металоконструкцій, поява нових будівель і технічного обладнання можуть суттєво впливати на якість сигналу та точність позиціонування.

Класичний підхід до вирішення цієї проблеми – збільшення кількості контрольних точок або застосування більш потужних сенсорів – призводить до значного зростання витрат. Це робить використання однієї універсальної технології нерентабельним для мобільних і тимчасових робочих зон.

У зв'язку із цим усе більшої уваги набуває розробка гібридних систем позиціонування, що інтегрують кілька технологій для компенсації недо-

ліків кожної з них. Перспективним підходом є комбінування супутникових систем із локальними технологіями.

Використання фільтра Калмана для обробки даних із різних джерел дає змогу згладжувати шумові складові, коригувати неточності та підвищувати точність визначення координат об'єктів у реальному часі. Такі рішення сприятимуть адаптивності системи до змінних умов експлуатації, що особливо важливо для будівельних і промислових майданчиків.

Отже, об'єктом дослідження є визначення координат технічних об'єктів і персоналу в реальному часі із заданою точністю. Метою роботи є розробка архітектури гібридної системи позиціонування об'єктів на будівельних майданчиках, що поєднує супутникові та локальні технології, забезпечує мінімізацію похибок позиціонування, підвищує надійність системи й економічну ефективність.

Для досягнення поставленої мети потрібно вирішення таких задач:

- визначення видів технологій;
- вибір методики зонування території;
- обробка сигналів та зменшення рівня шуму;
- збереження даних.

Огляд літератури. На сьогодні інтерес науковців до проблематики позиціонування об'єктів у складних середовищах, зокрема на будівельних майданчиках, відображається у значній кількості досліджень, які спрямовані на пошук більш ефективних рішень. Будівельні майданчики відзначаються динамічністю, змінною конфігурацією та обмеженою інфраструктурою, що ускладнює використання традиційних засобів позиціонування [1]. У таких умовах саме багатосенсорні системи стають технологічною основою для створення гнучкої, адаптивної архітектури позиціонування.

У роботі [2] продемонстровано, що в умовах промислових об'єктів точність супутникового позиціонування істотно знижується – похибка може сягати 20–50 метрів, особливо за наявності металевих конструкцій або відсутності прямої видимості до супутників. Дослідження роботи технології UWB демонструє вищу точність позиціонування у відкритому середовищі, однак робота системи передбачає точне і стабільне розміщення антен на відомих відносних позиціях, що ускладнює масштабування та роботу системи за зміни конфігурації простору [3]. Усе це обумовлює необхідність використання альтернативних або комбінованих рішень.

У цьому контексті [4] пропонують архітектуру гібридного позиціонування, яка передбачає автоматичне перемикавання між різними джерелами залежно від якості сигналу. Такий підхід дає змогу підвищити стабільність позиціонування й оптимізувати енергоспоживання пристроїв. Проте система

була реалізована у відносно стабільних умовах, що обмежує можливість її застосування в умовах постійної просторової динаміки, властивій будівельним майданчикам.

У дослідженні [5] інтегровано дані з UWB та IMU з використанням комплементарного фільтра і фільтра Калмана. Запропонована система досягає високої точності. Вона ефективна в умовах обмеженої видимості та дає можливість зберігати безперервність позиціонування. Водночас практичне застосування такої технології у відкритих і динамічних просторах ускладнюється необхідністю щільного та стабільного розміщення антен, що важко для реалізації та масштабування на будівельних майданчиках.

Дослідження [6] показує контекстно залежне гібридне рішення для позиціонування, що адаптується до змін GNSS-похибок у часі. Такий підхід демонструє високу точність у складних просторових сценаріях, проте потребує складного сенсорного комплексу та не є орієнтованим на економічно ефективне розгортання в умовах будівництва.

Методи. Для реалізації гібридної системи позиціонування запропоновано архітектуру на основі супутникових технологій, UWB та Wi-Fi. Залежно від рівня необхідної точності та надійності системи, складності майданчика, а також з огляду на можливу динамічну зміну його конфігурації ці технології можуть комбінуватися різними варіантами.

Запропонований підхід дає змогу адаптивно налаштовувати систему до умов заданого майданчика, використовуючи переваги кожної технології. Для цього в процесі розробки системи позиціонування ключовим завданням є ефективне зонування території, що дає змогу оптимально розміщувати датчики.

Для опису архітектури системи використовується ієрархічний підхід, що надає можливість розглянути особливості реалізації системи на апаратному та програмному рівні, врахувати особливості території будівельного майданчика та зміни його конфігурації з часом.

Результати. Одним із найбільш ефективним підходів до організації зонування території майданчика є використання гексагональної (шестикутної) сітки [7]. Основні переваги цього підходу:

- рівномірне покриття без прогалів. Гексагональна сітка дає змогу рівномірно покривати всю територію без накладань або прогалів в покритті;
- мінімізація відстані між сусідніми точками. У гексагональній сітці кожна зона має однакову відстань до всіх шести сусідів, що знижує затримки під час передавання сигналу та покращує ефективність розміщення датчиків;

– ефективне використання обчислювальних ресурсів. Гексагональна сітка потребує менше

обчислювальних для розрахунку розташування об'єктів порівняно з квадратною або круговою структурою. Це полегшує алгоритми визначення найближчих сусідів і зменшує навантаження на систему обробки даних;

– оптимальне використання датчиків. У гексагональній схемі кожен датчик може взаємодіяти із шістьма сусідніми зонами, що забезпечує надійність покриття та дає змогу швидко адаптувати систему до змін у середовищі (наприклад, у разі встановлення нових перешкод або зміни планування території).

Визначення зон базується на ключових факторах, які наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Фактори, що впливають на якість позиціонування

Фактор	Характеристики
Електромагнітні перешкоди	металеві конструкції, промислового обладнання, джерел випромінювання (високовольтні лінії або радіозв'язок)
Динамічність середовища	зміни у конфігурації майданчика (тимчасові споруди, рухомі механізми, збільшення металевих конструкцій)
Тип середовища	відкритий простір або приміщення

На зони також можуть накладатися додаткові вимоги до точності позиціонування, що пов'язані з безпечним перебуванням об'єктів на певній ділянці.

З огляду на це майданчик розподіляється на зони ризику, які класифікуються за рівнем критичності:

– критичні зони (зони підвищеної небезпеки) потребують найвищої точності позиціонування, тому використовується комбінація супутникових технологій, UWB та Wi-Fi;

– зони середньої критичності передбачають використання двох технологій без втрати точності даних (наприклад, UWB та Wi-Fi для закритих майданчиків або GPS та Wi-Fi/GPS та UWB для комбінованих майданчиків);

– зони низької критичності використовують одну технологію залежно від доступності сигналу та вимог до точності;

– «мертві зони» (ділянки, де неможливе позиціонування) виникають у місцях, де сигнал відсутній або надто нестабільний через перешкоди, рельєф чи інші завади.

У таблиці 2 наведено показники надійності, точності й економічності для технологій, які використовуються в гібридній системі позиціонування.

Робота системи позиціонування ґрунтується на чотирирівневій архітектурі, наведеній на рис. 1.

Сенсорний рівень обладнано GPS-приймачами, які отримують сигнали від супутників і визначають координати об'єктів. Однак у віддалених регіонах, де можливі затримки сигналу або погіршення точності через рельєф місцевості та наявність перешкод, додатково застосовується супутникова система Starlink, яка забезпечує

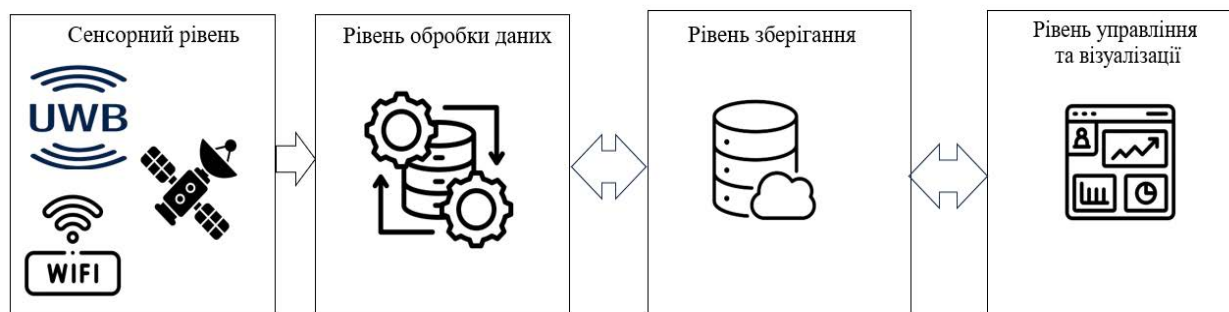


Рис. 1. Архітектура системи позиціонування

Таблиця 2

Показники технологій гібридної системи

Технологія	Надійність	Точність	Економічність
супутникова	висока, працює в будь-яких умовах за наявності сигналу від супутників	3–5 м на відкритих територіях	GPS-приймачі доступні, але підключення до Starlink потребує додаткових витрат
UWB	висока, добре працює навіть у складних умовах (металеві конструкції, бетонні стіни)	до 50 см, що робить його найкращим варіантом для критичних зон	потребує інфраструктури (якорі + мітки), але виправдовує витрати у високоточних сценаріях
Wi-Fi	середня, залежить від конфігурації мережі	1–3 м	потребує інфраструктури

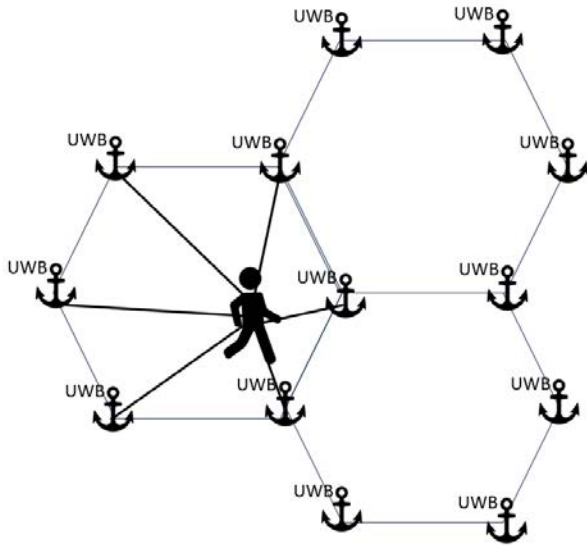


Рис. 2. Розміщення датчиків з технологією UWB

стабільний зв'язок і зменшує похибки в процесі обробки геолокаційних даних. Завдяки інтеграції Starlink із наземними приймальними станціями з'являється можливість отримувати точніші координати та покращувати якість позиціонування в режимі реального часу. Проте використання лише супутникових технологій не завжди забезпечує необхідний рівень точності, особливо в зонах зі складною забудовою або на територіях, де прямий доступ до супутникових сигналів може бути обмеженим.

Для підвищення точності в таких умовах додатково застосовуються стаціонарні UWB-якорі (рис. 2), які отримують сигнали від переносних міток і визначають їх розташування на основі методу вимірювання часу проходження сигналу.

UWB технологія дає змогу значно зменшити похибку та забезпечити високу точність позиціонування навіть у зонах із металевими конструкціями та іншими джерелами завад. В умовах, де потрібно додатково підвищити точність і зменшити вплив перешкод, застосовується технологія Wi-Fi для позиціонування (рис. 3), яка ґрунтується на аналізі часу проходження сигналу між пристроєм і точками доступу. Це дає змогу коригувати дані, отримані з інших джерел, і підвищувати точність визначення координат у критичних зонах.

Рівень обробки даних виконує аналіз, фільтрацію та корекцію отриманих сигналів, забезпечуючи підвищення точності визначення розташування об'єктів. Дані, отримані від супутникових технологій, UWB та Wi-Fi, передаються на сервер, де застосовується фільтр Калмана для усунення шумів і похибок, що виникають унаслідок

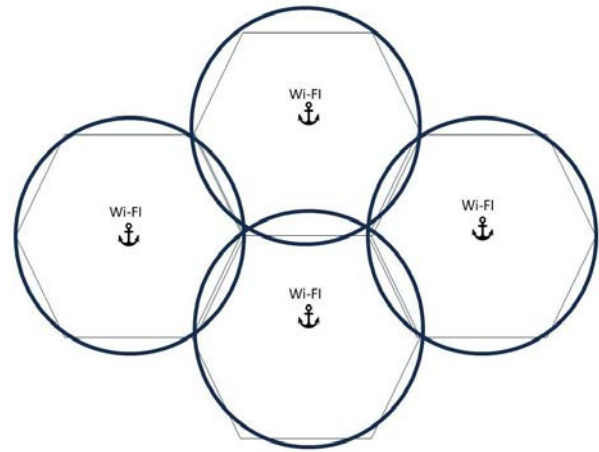


Рис. 3 Розміщення датчиків з технологією Wi-Fi

багатопроменевого поширення сигналу, впливу перешкод або змін у навколишньому середовищі (рис. 4). Використання цього методу дає змогу згладжувати коливання координат і забезпечувати стабільність визначення місця розташування навіть за умов нестабільного приймання сигналів.

В умовах одночасного використання кількох технологій одночасно важливим є аналіз достовірності даних. Ваговий коефіцієнт W_i визначає, наскільки можна довіряти даним від певної технології під час обчислення точного розташування. Чим вищий коефіцієнт, тим більше довіри до джерела [8].

Обчислення вагового коефіцієнта ґрунтується на трьох основних чинниках:

- стабільність сигналу (σ) – наскільки сильно змінюються координати в часі;
- якість сигналу (SNR, потужність сигналу, втрати);
- перешкоди в середовищі – вплив металевих конструкцій, погоди, багатопроменевого поширення.

Кожен коефіцієнт розраховується за адаптивною моделлю:

$$W_i = \frac{Q_i}{\sum Q_i},$$

де W_i – ваговий коефіцієнт технології i (GPS, UWB, Wi-Fi);

Q_i – оцінка якості сигналу технології i (GPS, UWB, Wi-Fi).

Сума всіх W_i дорівнює 1 (щоб балансувати вплив кожної технології).

Оцінка якості сигналу Q_i розраховується так:

$$Q_i = \alpha \frac{1}{\sigma_i} + \beta \cdot SNR_i + \gamma C_i,$$

де σ_i – стандартне відхилення координат (чим менше, тим точніше);

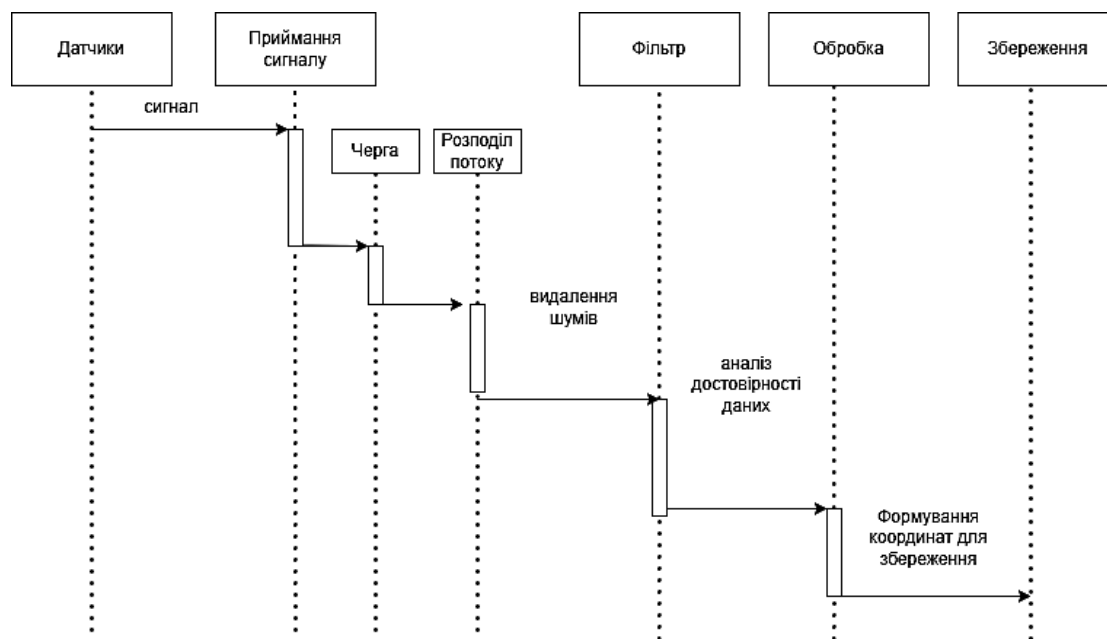


Рис. 4. Діаграма послідовності на рівні обробки сигналу

SNR— рівень сигналу (чим більше, тим краще);

C_i — коригувальний коефіцієнт для середовища (перешкоди, метал, відкритий простір);

α, β, γ — коефіцієнти впливу.

Оскільки всі величини подані в різних одиницях виміру, застосуємо метод нормалізації [9]. Для цього кожне значення перетворюється за формулою:

$$x'_i = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}},$$

де $x_{\max}$ — максимальне значення в наборі даних;

$x_{\min}$ — мінімальне значення в наборі даних.

Таблиця 3

**Розрахункові коефіцієнти довіри
для технологій**

Технологія	σ (м)	SNR (dB)	C	Оцінка Qi	Варіа Wi
GPS	3	35	0.9	1.15	0.158
UWB	0.5	50	1.0	3	0.619
Wi-Fi	2	30	0.8	1.2	0.223

Інтеграція даних із різних джерел дає змогу компенсувати слабкі сторони кожної технології. У разі блокування або значного погіршення точності сигналу GPS система може перемикається на використання даних, отриманих від UWB або Wi-Fi (за наявності), що забезпечує безперервне позиціонування.

Такий підхід підвищує стійкість системи до зовнішніх факторів, зокрема погодних умов, наявності металевих конструкцій або динамічних змін конфігурації простору.

Після корекції дані зберігаються для подальшого аналізу та використання. Централізоване сховище інформації дає змогу здійснювати ретроспективний аналіз, будувати прогнози руху об'єктів і оптимізувати логістичні процеси, що особливо важливо для промислових підприємств і великих будівельних майданчиків.

Такий підхід забезпечує створення адаптивної системи позиціонування, здатної працювати у змінних умовах і гарантувати високу точність та надійність визначення координат об'єктів.

Надійне й ефективне збереження інформації є критично важливим завданням у системах позиціонування об'єктів. Динамічність конфігурації простору, зміна умов роботи сенсорів і необхідність обробки великого обсягу даних потребують використання багаторівневої архітектури збереження інформації.

Запропоновано підхід до організації системи збереження, що має три основні рівні: оперативне, довготривале та архівне сховища (рис. 5).

Структура збереження інформації ґрунтується на концептуальній моделі бази даних (рис. 6), що містить основні сутності, наведені в таблиці 4.

На оперативному рівні зберігаються дані, необхідні для обчислення координат у режимі реального часу. Основу сховища становить реляційна база даних, що забезпечує структуроване збереження інформації та швидкий доступ до актуальних записів.

Для підвищення продуктивності застосовується індексація координатних даних, а також поділ таблиць, що містять історію переміщень. Зокрема, поділ виконується за часовими інтерва-

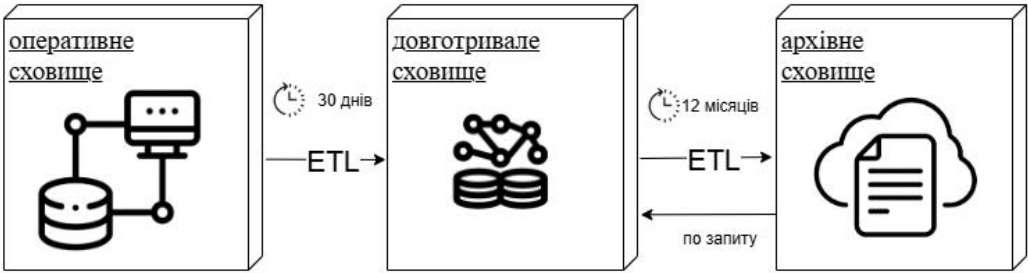


Рис. 5. Організація системи збереження

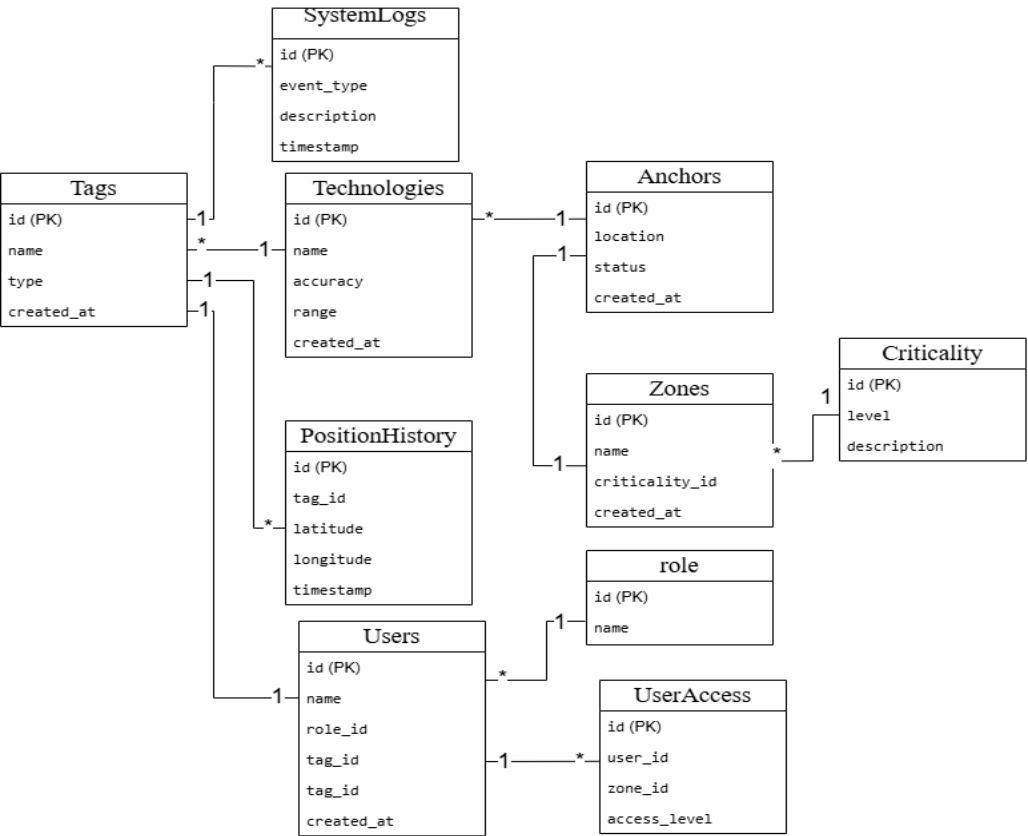


Рис. 6. Концептуальна модель бази даних

Таблиця 4

Основні сутності бази даних рівня збереження інформації

Найменування	Опис
Tags	ідентифікатори мобільних об'єктів, що підлягають позиціонуванню
Anchors	стаціонарні опорні точки, що отримують сигнали від мобільних об'єктів
PositionHistory	історія переміщень об'єктів із прив'язкою до часу та просторових координат
Zones	розбиття простору за рівнем критичності позиціонування
Technologies	типи застосовуваних технологій позиціонування
SystemLogs	журнал подій, який фіксує помилки, втрату зв'язку та зміну конфігурації системи
Criticality	типи критичності зон
Users	перелік об'єктів, що підлягають позиціонуванню
Role	довідник ролей для доступу до системи позиціонування
UserAccess	права доступу до об'єктів у системі

лами, що дає змогу зменшити навантаження на запити вибірки даних.

Кешування забезпечує миттєвий доступ до останніх координат мобільних об'єктів, а також до основних параметрів роботи сенсорної мережі.

Інформація, що накопичується в процесі роботи системи, переміщується до NoSQL-сховища, що дає змогу ефективно працювати з великими обсягами даних, зокрема історією переміщень об'єктів та логами функціонування сенсорів.

До основних категорій даних, що зберігаються в довготривалому сховищі, належать:

- відстеження змін координат об'єктів у часовому розрізі;
- фіксація зон, у яких перебував об'єкт у різні моменти часу;
- логування змін рівня сигналу для аналізу точності позиціонування;
- журнал подій, який містить інформацію про втрату зв'язку, помилки датчиків і взаємодію користувачів із системою.

Переміщення даних із реляційного сховища до NoSQL здійснюється за допомогою ETL-процесів, що автоматично фільтрують, агрегують і передають інформацію на основі визначених часових вікон.

Дані, які не використовуються для активних розрахунків або аналітики, але можуть знадобитися для ретроспективного аналізу, переносяться до архівного сховища. Це дає змогу розвантажити основну систему збереження, водночас забезпечуючи довготривалий доступ до історичних записів.

До категорії архівних даних належать:

- історія позиціонування об'єктів, що зберігається понад 12 місяців;
- файли картографічних даних, використані для візуалізації майданчиків;
- архівні журнали подій і користувацької активності.

Доступ до архівних даних здійснюється за запитом, а в разі потреби інформація тимчасово

відновлюється у NoSQL-сховище для проведення аналітичних розрахунків.

Рівень управління та візуалізації забезпечує доступ користувачів до оброблених даних про розташування об'єктів. Для взаємодії із системою використовується вебінтерфейс, що дає змогу відстежувати переміщення персоналу та техніки. Користувачі можуть переглядати актуальні координати, аналізувати історію переміщень і отримувати аналітичні дані про використання ресурсів на території об'єкта.

Для адміністрування використовується спеціалізована панель керування, яка дає змогу налаштовувати рівні доступу користувачів, керувати параметрами відстеження, конфігурацією обладнання й інтеграцією з іншими інформаційними системами. Адміністратори можуть контролювати роботу системи, налаштовувати правила сповіщень, проводити діагностику пристроїв і здійснювати оновлення програмного забезпечення для стабільної та безпечної роботи системи.

Візуалізація даних у системі позиціонування здійснюється за допомогою інтерактивного дашборду, що дає змогу користувачам здійснювати моніторинг розташування об'єктів у реальному часі, аналізувати історичні дані й оцінювати ефективність використання технологій позиціонування. Інтерфейс містить графічні елементи, як-от гістограми, кругові діаграми та лінійні графіки, що відображають частоту використання різних технологій позиціонування, динаміку зміни рівня сигналу (SNR) і середню точність методів визначення координат, зокрема UWB, Wi-Fi та GPS (рис. 7).

Дані, що використовуються для побудови аналітики, можуть надходити з різних джерел. Зокрема, SQL-база та API забезпечують обмін інформацією з іншими інформаційними системами й отримання оновлених значень у реальному часі. Для покращення взаємодії із зовнішніми модулями система підтримує можливість

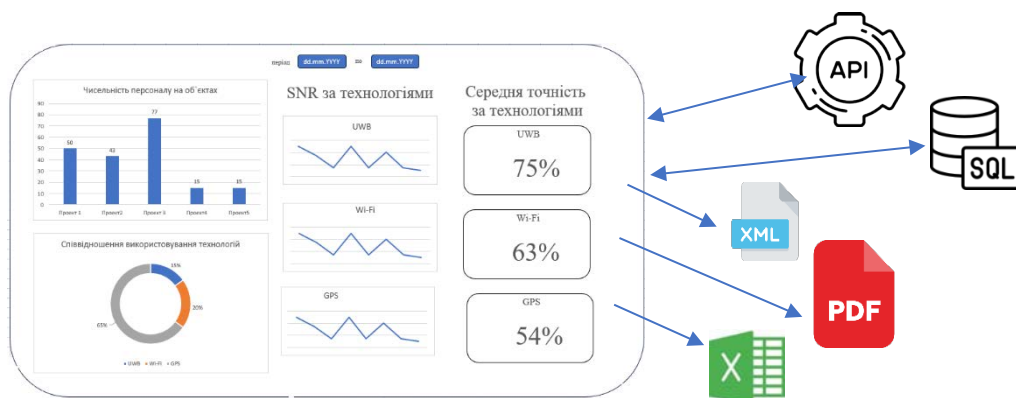


Рис. 7. Приклад дашборду для системи позиціонування

експорту даних у форматах XML, що використовується для інтеграції з іншими програмними комплексами, PDF – для створення звітності, а також Excel (XLSX) – для проведення детального аналізу й обробки інформації.

Висновки. Запропонована в дослідженні архітектура системи позиціонування ґрунтується на концепції зонування об'єкта за рівнем критичності, що дає можливість залежно від конфігурації простору та динамічності будівельного майданчика гнучко підбирати комбінацію технологій відповідно до заданих вимог щодо точності, надійності та економічної доцільності. У зонах із високими вимогами до точності активуються супутникові технології у поєднанні з двома локальними. У менш критичних зонах, де достатньо базового позиціонування, система перемикається на енергозберігаючі й економічні рішення.

Обробка сигналів із декількох технологій здійснюється за допомогою адаптивного алгоритму з фільтрацією шумів, що дає змогу досягти стабільної точності навіть в умовах часткових перешкод або втрати прямої видимості. Такий підхід забезпечує не лише точність, але й стійкість до змін структури простору, що є характерною рисою будівельних об'єктів.

На відміну від роботи [5], де розглянуто гібридну систему позиціонування з високим рівнем точності, але з вимогою статичного розміщення антен, що суттєво обмежує її адаптивність

у змінному середовищі, запропонована в цьому дослідженні архітектура враховує просторову динаміку завдяки впровадженню механізму зонування та використання кількох типів технологій відповідно до критичності зон. Такий підхід дає змогу не лише підтримувати необхідну точність, а й оптимізувати витрати, враховуючи економічну доцільність розгортання системи.

Порівняно з підходом, описаним у [6], який орієнтований на зміну конфігурації середовища й адаптується до просторових умов, але базується на складному та дорогому сенсорному комплексі (GNSS + VIO), запропоноване рішення досягає аналогічного рівня адаптивності шляхом більш раціонального поєднання технологій залежно від зон критичності. Завдяки цьому забезпечується баланс між точністю, надійністю та вартістю, що є ключовим чинником для використання в умовах мобільних і тимчасових об'єктів, зокрема будівельних майданчиків.

Отже, гнучке зонування й адаптивна сенсорна інтеграція дають можливість створити масштабовану, портативну та ефективну систему, придатну для швидкого розгортання на об'єктах із різними характеристиками, що вигідно вирізняє її серед існуючих рішень.

Подальші дослідження будуть зосереджені на оптимізації розміщення сенсорів і використанні метаевристичних методів для автоматизації налаштувань системи в режимі реального часу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Park M., Tran D.Q., Bak J., Park S. Small and overlapping worker detection at construction sites. *Automation in Construction*. 2023. Vol. 154. Article 105117. DOI: 10.1016/j.autcon.2023.105117.
2. Li D., Lei Y., Zhang H. A novel outdoor positioning technique using LTE network fingerprints. *Sensors*. 2020. Vol. 20. No. 6. Article 1691. DOI: 10.3390/s20061691.
3. Rykała Ł., Typiak A., Typiak R. Research on developing an outdoor location system based on the ultra-wideband technology. *Sensors*. 2020. Vol. 20. No. 21. Article 6171. DOI: 10.3390/s20216171.
4. Fernández P.J., Santa J., Skarmeta A.F. Hybrid positioning for smart spaces: Proposal and evaluation. *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10. No. 12. Article 4083. DOI: 10.3390/app10124083.
5. Zhang C., Gao W., Xiao S.N., Meng L. Cost-effective wearable indoor localization and motion analysis via the integration of UWB and IMU. *Sensors*. 2020. Vol. 20. No. 2. Article 344. DOI: 10.3390/s20020344.
6. Angelats E., López-Salcedo J.A., Seco-Granados G. Enhanced seamless indoor–outdoor tracking using time series of GNSS positioning errors. *ISPRS International Journal of Geo-Information*. 2024. Vol. 13. No. 3. Article 72. DOI: 10.3390/ijgi13030072.
7. Apte M., Agarwadkar Y., Azmi S., Inamdar A. Understanding grids and effectiveness of hexagonal grid in spatial domain [Електронний ресурс]. *ResearchGate*. 2013. Режим доступу: <https://www.researchgate.net/publication/235429421>.
8. Ezell B., Lynch C.J., Hester P.T. Methods for weighting decisions to assist modelers and decision analysts: A review of ratio assignment and approximate techniques // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11. No. 21. Article 10397. DOI: 10.3390/app112110397.
9. Starovoitov V.V., Golub Y.I. Data normalization in machine learning // *Informatics*. 2021. Vol. 18. No. 3. P. 83–96. DOI: 10.37661/1816-0301-2021-18-3-83-96.

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ЧЕРГ ТА ІМОВІРНІСНОГО АНАЛІЗУ В АВТОМАТИЗОВАНОМУ ТЕСТУВАННІ ВЕБЗАСТОСУНКІВ

Чузов Д. В.

аспірант

Запорізький національний університет

вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна

orcid.org/0009-0006-3879-6536

chuzov.d@gmail.com

Чопорова О. В.

доктор філософії, доцент

Запорізький національний університет

вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна

orcid.org/0000-0003-3167-7869

o.choporova@znu.edu.ua

Ключові слова:

*автоматизоване тестування,
вебдодатки, теорія черг,
інформаційні технології,
імовірнісний аналіз.*

У статті розглядається актуальна проблема автоматизованого тестування вебзастосунків, що стає все більш важливим з огляду на стрімке зростання складності сучасних вебсистем і вимог до їх надійності, якості та продуктивності. Пропонований підхід базується на застосуванні методів імовірнісного аналізу та теорії черг, що дає змогу моделювати процеси взаємодії користувачів із вебзастосунками і прогнозувати їх поведінку в умовах різноманітних сценаріїв використання. Особлива увага приділяється розробці аналітичних моделей, які враховують випадковий характер виникнення запитів до сервера, а також можливі затримки у їх обробці, що виникають через обмежені ресурси системи.

У дослідженні побудовано модель на основі теорії черг, яка дає можливість описати процеси обробки запитів у вебзастосунках. З використанням методів імовірнісного аналізу можна оцінювати ймовірності різних сценаріїв, що виникають під час тестування, а саме моделювати збої системи за перевищення граничного навантаження або виникнення черг на обслуговування запитів. Це дає змогу краще розуміти потенційні проблеми продуктивності та надійності вебсистем, а також розробляти ефективні стратегії їх тестування.

Запропонована методологія автоматизованого тестування уможливіє оптимізацію процесу виявлення вразливостей і збоїв у роботі вебзастосунків. Описані концептуальні моделі можуть бути інтегровані в існуючі системи автоматизованого тестування, забезпечуючи їхню більшу точність і надійність. Крім того, застосування теорії черг у контексті тестування дає змогу вирішувати завдання оптимізації розподілу ресурсів під час роботи з великими обсягами даних, що також підвищує ефективність роботи вебзастосунків у режимах високого навантаження. Отже, результати дослідження можуть бути корисними для розробників і тестувальників вебсистем, а також для науковців, що займаються проблемами моделювання процесів у сфері інформаційних технологій.

USING QUEUE THEORY AND PROBABILITY ANALYSIS IN AUTOMATED WEB APPLICATION TESTING

Chuzov D. V.

Postgraduate Student

Zaporizhzhia National University

Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine

orcid.org/0009-0006-3879-6536

chuzov.d@gmail.com

Choporova O. V.

Doctor of Philosophy, Associate Professor

Zaporizhzhia National University

Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine

orcid.org/0000-0003-3167-7869

o.choporova@znu.edu.ua

Key words: *automated testing, web applications, queueing theory, information technology, probabilistic analysis.*

The article addresses the pressing issue of automated testing of web applications, which is becoming increasingly important due to the rapid growth in the complexity of modern web systems and the demands for their reliability, quality, and performance. The proposed approach is based on the application of probabilistic analysis methods and queueing theory, allowing the modeling of user interaction processes with web applications and predicting their behavior under various usage scenarios. Special attention is given to the development of analytical models that take into account the random nature of server requests and the possible delays in their processing due to the system's limited resources.

Within the framework of the study, a model based on queueing theory was constructed, enabling a description of the request processing processes in web applications. The use of probabilistic analysis methods allows for the assessment of the likelihood of various scenarios occurring during testing, in particular, simulating system failures when the load exceeds the limit or when queues form for request processing. This helps to better understand potential performance and reliability issues of web systems and to develop effective testing strategies.

The proposed methodology for automated testing allows for the optimization of the process of identifying vulnerabilities and failures in the operation of web applications. The described conceptual models can be integrated into existing automated testing systems, ensuring greater accuracy and reliability. Moreover, the use of queueing theory in the context of testing helps solve resource allocation optimization tasks when working with large amounts of data, which also improves the efficiency of web applications under high-load conditions. Ultimately, the results of the research can be useful to web system developers and testers, as well as to researchers involved in mathematical modeling problems in the field of information technology.

Вступ. Автоматизоване тестування вебзастосунків зазвичай є окремим етапом у забезпеченні якості програмного забезпечення, особливо в умовах зростаючої складності вебархітектур і збільшення числа одночасних користувачів. Складність полягає в тому, що традиційні методи тестування не завжди можуть ефективно передбачити можливі збої чи аномалії в поведінці системи під час пікових навантажень. Часто ігноруються критичні аспекти продуктивності, як-от час відповіді системи, кількість оброблених запитів та стійкість до відмов.

На сьогодні є актуальною потреба в розробці аналітичних підходів, які могли б адекватно описувати динаміку роботи вебзастосунків у реальних умовах експлуатації. Теорія черг, імовірнісні моделі та методи оцінки ризиків можуть допомогти спрогнозувати поведінку системи та підвищити ефективність автоматизованого тестування, особливо в умовах непередбачуваних навантажень.

Метою дослідження є аналіз ефективності застосування методів моделювання у процесі автоматизованого тестування вебзастосунків в умовах реальних навантажень. Особлива увага приділяється оцінці продуктивності систем за допомогою теорії черг та імовірнісних методів на етапі автоматизованого тестування, що дає змогу підвищити точність прогнозування поведінки вебдодатків, зменшити ризики перевантаження та покращити якість тестування.

Огляд літератури. Автоматизоване тестування вебзастосунків є актуальною технологією у забезпеченні якості програмного забезпечення, що підтверджується значним зростанням кількості досліджень у цій сфері. Однією з фундаментальних праць у цій галузі є робота Февстера, де розглянуто ефективне використання інструментів автоматизації тестування [1], що заклала основу для подальших досліджень у напрямі автоматизованого аналізу вебдодатків. Робота Тріведі [2] стала основоположною для використання імовірнісного аналізу в оцінці надійності комп'ютерних систем, що дає можливість ефективно моделювати випадкові процеси, як-от запити користувачів до серверів вебзастосунків. Зі свого боку, Клейнрок [3] одним із перших застосував теорію черг для аналізу комп'ютерних систем, заклавши базу для розробки підходів, що описують обробку запитів у системах з обмеженими ресурсами. Його ідеї були продовжені в роботах, наприклад, Бушері та Ван Дейка [4], які запропонували методи для ефективнішого прогнозування завантаження систем, оптимізацію їхньої продуктивності та визначення пропускну здатності, необхідної для забезпечення стабільної роботи мережі.

Дослідження останніх років свідчать про підвищену увагу до поєднання ймовірнісних методів

і теорії. Зокрема, професор Вашингтонського університету в Сент-Луїсі Радж Джайн у своїй роботі наводить детальний аналіз методів продуктивності комп'ютерних систем, зокрема вебсерверів, і описує важливість моделювання прогнозування поведінки систем за різних типів навантажень [5]. Детальне дослідження продуктивності вебсерверів на основі моделей черг провели дослідники університету Коннектикуту й довели, що ці моделі дають змогу значно підвищити точність передбачення часу обробки запитів і допомагають виявляти критичні точки перевантаження [6].

Однак, попри значні досягнення в цій галузі, залишаються відкритими питання, пов'язані з інтеграцією аналітичних моделей і автоматизованих інструментів тестування у єдину систему. Більшість сучасних підходів зосереджені на окремих аспектах тестування, як-от моделювання навантажень або оцінка продуктивності, але комплексні рішення, що поєднують імовірнісний аналіз, теорію черг та автоматизацію, залишаються недостатньо розробленими. Саме на ці аспекти спрямовані сучасні дослідження, зокрема, у контексті моделювання взаємодії вебзастосунків із користувачами за допомогою імовірнісних методів.

Таким чином, аналіз останніх публікацій демонструє важливість подальшого розвитку концептуальних моделей для автоматизованого тестування вебсистем, що базуються на імовірнісному аналізі та теорії черг. Це дасть можливість вирішувати нові виклики, що виникають через збільшення складності вебдодатків і підвищені вимоги до їх продуктивності та надійності.

Виклад матеріалу дослідження. Для побудови описових моделей автоматизованого тестування вебзастосунків поєднано кілька базових підходів: теорія черг та ймовірнісне моделювання. Основна увага приділялася моделям обслуговування запитів і поведінці системи під час обробки великих обсягів даних.

Моделювання вебтрафіку за допомогою теорії черг є одним з основних підходів для аналізу продуктивності вебдодатків під час обробки запитів користувачів. У цій статті розглядається використання моделі М/М/1, яка є класичною моделлю масового обслуговування [7]. Позначення М/М/1 походить із теорії черг і розшифровується таким чином: перша «М» (Memoryless) означає, що запити надходять у систему згідно з пуассонівським процесом (марківський вхідний потік), друга «М» вказує на експоненційний розподіл часу обслуговування, а «1» означає, що в системі є лише один канал обслуговування (сервер).

Теорія черг використовується для опису систем, у яких заявки (у нашому випадку – запити від користувачів) надходять до системи (серверу), що їх обслуговує. У моделі М/М/1 припускається, що:

а) запити надходять до системи згідно з пуассонівським розподілом із середньою інтенсивністю λ (кількість запитів за одиницю часу) [8];

б) час обробки запиту на сервері є випадковою величиною, яка підпорядковується експоненціальному розподілу із середньою інтенсивністю μ (кількість запитів, які сервер може обробити за одиницю часу);

в) у системі є один канал обслуговування (сервер).

Модель М/М/1 дає змогу оцінити середній час перебування запиту в системі, довжину черги, ймовірність того, що користувачі стикнуться з затримками, а також час очікування на обслуговування.

Запропонований підхід дає можливість не тільки оцінити основні параметри продуктивності, але й визначити критичні точки перевантаження вебсистеми. Це є важливим кроком у вдосконаленні методів автоматизованого тестування, оскільки тестувальники зможуть адаптивно змінювати параметри тестових сценаріїв відповідно до прогнозованих навантажень.

Ключовими метриками моделі М/М/1 є:

1. Імовірність затримки або відмови в обслуговуванні. Це найголовніший показник, що визначає ймовірність того, що черга зросте занадто великою і запити будуть затримуватися. Модель М/М/1 дає змогу оцінити цю ймовірність, особливо в умовах наближення до пікового навантаження, коли інтенсивність надходження запитів λ стає близькою до інтенсивності обслуговування μ .

Згідно з моделлю М/М/1, продуктивність вебдодатка може погіршуватися в разі збільшення кількості користувачів або під час пікових навантажень. Основний показник, що характеризує навантаження на систему, – це коефіцієнт використання сервера (ρ), який обчислюється як:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (1)$$

Цей коефіцієнт вказує, яку частку часу сервер зайнятий обробкою запитів. Якщо ρ наближається до 1, система стає перевантаженою, що веде до зростання часу очікування запитів у черзі та підвищеного ризику збоїв.

2. Середня довжина черги: це очікувана кількість запитів, що перебувають у черзі на обслуговування. Вона обчислюється як очікуване значення кількості заявок у черзі:

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n, \quad (2)$$

де P_n – ймовірність того, що в системі є n запитів (разом із тими, що в черзі та на обслуговуванні). Відомо, що для стаціонарного стану система задовольняє балансові рівняння:

$$P_n = P_{n+1}\lambda. \quad (3)$$

Це означає, що ймовірність переходу від стану

n до стану $n+1$ (надходження нової заявки) дорівнює ймовірності переходу від стану $n+1$ до стану n (обслуговування заявки сервером). Для нульового стану (коли в системі немає заявок):

$$P_1\lambda = P_0\mu. \quad (4)$$

Звідси знаходимо:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0, \quad (5)$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n P_0. \quad (6)$$

Щоб отримати P_0 , використовуємо умову, що сума всіх ймовірностей дорівнює 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1. \quad (7)$$

Це дає суму геометричної прогресії:

$$P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1, \quad (8)$$

$$P_0 * \frac{1}{1-\rho} = 1. \quad (9)$$

Повертаючись до формули (2), підставимо у неї значення ρ та P_n з виразу (6):

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\rho^n P_0. \quad (9)$$

Оскільки, маємо:

$$L_q = (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\rho^n. \quad (10)$$

Тепер потрібно знайти суму:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\rho^n. \quad (11)$$

Диференціюючи суму геометричної прогресії, отримуємо такі формули:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}, \text{ для } |\rho| < 1. \quad (12)$$

Запишемо оригінальний ряд таким чином:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n - \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n. \quad (13)$$

Підставимо відомі суми:

$$S = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} - \frac{1}{1-\rho} = \frac{\rho-(\rho-1)}{(1-\rho)^2} = \frac{2\rho-1}{(1-\rho)^2}, \quad (14)$$

$$L_q = (1-\rho)S = (1-\rho) \frac{2\rho-1}{(1-\rho)^2} = \frac{2\rho-1}{1-\rho}. \quad (15)$$

Підставимо $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$:

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}. \quad (16)$$

Отже, формула середньої довжини черги:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}. \quad (17)$$

Звідси маємо, що якщо інтенсивність запитів λ зростає, то довжина черги L_q збільшується квадратично. Якщо λ наближається до μ , то $L_q \rightarrow \infty$, що означає перевантаження системи. А чим більша швидкість обслуговування μ , тим менша черга.

3. Середній час перебування в системі. Цей показник визначає загальний час, який запит проводить у системі, включно з часом очікування в черзі та часом обслуговування сервером. Середній час перебування заявки в системі складається із середнього часу очікування в черзі W_q – скільки часу заявка чекає початку обслуговування, та середнього часу обслуговування W_s , який дорівнює $1/\mu$, оскільки час обробки однієї заявки має експоненційний розподіл із параметром μ . Отже, загальний час перебування заявки в системі можна описати такою формулою:

$$W = W_q + W_s. \quad (18)$$

Згідно з формулою Літтла, котра є однією з ключових теорем теорії масового обслуговування, середня кількість заявок у системі L_q пов'язана із середнім часом перебування W_q [9]:

$$L_q = \lambda W_q. \quad (19)$$

Середня кількість заявок у системі L_q вже відома з формули (17). Маючи це, середній час очікування в черзі можна описати таким чином:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}. \quad (20)$$

Підставимо W_q у вираз $W = W_q + W_s$:

$$W = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} + \frac{\mu - \lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\mu}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{\mu - \lambda}. \quad (21)$$

Отже, середній час перебування в системі W обчислюється за формулою:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad (22)$$

де μ – інтенсивність обслуговування, а λ – інтенсивність надходження запитів.

З використанням описаних метрик модель М/М/1 дає змогу проводити симуляції та прогнозувати стабільність роботи системи за різних рівнів навантаження, що є корисним для автоматизованого тестування вебдодатків. Завдяки цій моделі можна прогнозувати поведінку системи під час пікових навантажень, виявляти проблеми з продуктивністю, оцінювати ризики перевантаження й потенційні збої.

Для отримання практичних результатів модель було інтегровано в процес автоматизованого тестування. Проведено серію експериментів на вебзастосунках, розгорнутих на серверній інфраструктурі (операційна система Linux (версія Ubuntu 24.04), сервер на базі Apache з процесором

3.2 GHz і 16 GB оперативної пам'яті, база даних MySQL) з використанням одного сервера для обслуговування запитів.

Моделювання проводилося на основі М/М/1 моделі, а також за допомогою інструментів для автоматизованого тестування, зокрема JMeter [10] та Selenium [11]. Експерименти було налаштовано на кілька рівнів навантаження для детального аналізу продуктивності системи за різних умов, а саме експерименти передбачали низьке, середнє, високе та пікове навантаження, інтенсивність надходження запитів (λ) варіювалася від 50 до 250 запитів на секунду, а інтенсивність обслуговування (μ) була встановлена на 200 запитів на секунду, що відповідало максимальній обчислювальній потужності сервера. У підсумку було виміряно середній час перебування запиту в системі, коефіцієнт завантаження сервера (ρ) та середню довжину черги для кожного з варіантів навантаження (див. табл. 1).

Результати показали, що за низьких і середніх навантажень ($\rho \leq 0,5$) сервер працює ефективно, із середньою довжиною черги близько нуля. Імовірність затримки становить від 25 до 50 %, що означає, що лише частина запитів може потрапити в чергу. Отже, система функціонує стабільно, з мінімальними затримками. Подальші заходи оптимізації можуть бути необов'язковими, оскільки сервер здатний справлятися з навантаженням.

За високих навантажень ($\rho=0,75$) сервер працює на 75 % своєї пропускної здатності, що призводить до помітного збільшення черги до 2,25 запиту. Імовірність затримки досягає 75 %, що означає, що більшість запитів будуть змушені чекати. За такого рівня навантаження система ще стабільна, але користувачі вже можуть відчувати затримки. У таких випадках рекомендується запровадити балансування навантаження або оптимізацію обслуговування, щоб зменшити час очікування.

За пікових навантажень ($\rho=0,95$) система майже повністю завантажена. Середня довжина черги зростає до 9 запитів, що може значно збільшити час очікування для кожного запиту. Пікове навантаження робить систему вразливою до перевантажень і збоїв. Щоб уникнути проблем із продуктивністю, важливо розглянути додавання додаткових серверів, покращення алгоритмів кешування або впровадження більш ефективного розподілу навантаження.

А за екстремальних навантажень ($\rho>1,0$) сервер досягає своєї максимальної пропускної здатності. Середня довжина черги теоретично прямує до нескінченності, імовірність затримки досягає 100 %, а система ризикує не обробляти нові запити своєчасно. Для вирішення проблеми потрібно оптимізувати роботу сервера, наприклад, за допомогою

Таблиця 1

Результати експерименту залежно від рівня навантаження сервера

Варіант навантаження	Інтенсивність надходження (λ), запити/с	Інтенсивність обслуговування (μ), запити/с	Коефіцієнт використання сервера (ρ)	Середня довжина черги	Середній час перебування запиту в системі	Імовірність відмови або затримки
Низьке	50	200	0,25	0,083	0,267 с	25 %
Середнє	100	200	0,5	0,5	0,5 с	50 %
Високе	150	200	0,75	2,25	1 с	75 %
Пікове	190	200	0,95	9,025	5 с	95 %
Екстремальне	250	200	1,25	теоретично нескінченна черга	система перевантажена	100 %

балансування навантаження. Розподіл трафіку між декількома серверами може зменшити навантаження на кожен окремий сервер, що дасть змогу зменшити затримки і знизити ймовірність збою. Крім того, додавання додаткових серверів або збільшення обчислювальної потужності існуючих серверів допоможе підвищити значення інтенсивності обслуговування μ , що знизить коефіцієнт завантаження. Зі свого боку, застосування асинхронного оброблення запитів або оптимізація часу обробки запиту дає можливість збільшити пропускну здатність μ і зменшити середню довжину черги.

Таким чином, **результати** дослідження продемонстрували ефективність запропонованих моделей у прогнозуванні часу відповіді системи, ймовірності збоїв та оптимізації процесу тестування. Моделі теорії черг дають змогу покращити управління веб-трафіком, а ймовірнісні моделі – виявити критичні точки, де система може бути вразливою до збоїв.

Таке моделювання роботи системи може бути використано для створення більш стійких і надійних вебдодатків, що витримують навантаження та забезпечують швидкий час відповіді, що важливо для користувачів і розробників систем. Їх інтеграція у процес автоматизованого тестування вебзастосунків дає можливість створювати ефективні системи для симуляції навантажень та аналізу продуктивності й надійності. Ці моделі також можуть бути інтегровані з популярними інструментами автоматизованого тестування, як-от Selenium та JMeter, для проведення симуляцій, що відображають реальні сценарії використання вебзастосунків.

Моделі черг дають змогу точно моделювати потік запитів, що надходять до вебдодатка. У про-

цесі тестування ці моделі допомагають оцінювати, як система реагує на різні сценарії навантажень, які можуть передбачати як поступове збільшення кількості запитів, так і різкі пікові навантаження. Наприклад, інструмент JMeter може бути налаштований для симуляції великих потоків запитів відповідно до моделі M/M/1. Він дає змогу задавати різні параметри навантаження, як-от кількість користувачів і частота запитів, щоб відтворити поведінку системи у стані високої завантаженості. Зі свого боку, інструмент Selenium, котрий часто використовується для функціонального тестування вебдодатків, можна застосовувати для симуляції поведінки окремих користувачів або навіть групи користувачів одночасно, за різних умов навантаження, щоб виявити проблеми в продуктивності інтерфейсу користувача.

Крім аналізу продуктивності, інтеграція таких моделей у процес тестування дає можливість створювати комплексні сценарії для оцінки стійкості системи. Ці сценарії можуть відображати, як система поводитиметься за різних умов. Наприклад, тестування системи за максимального навантаження із застосуванням моделі M/M/1 або випадки, коли інтенсивність запитів λ наближається до інтенсивності обслуговування μ . Це дає змогу визначити точки, у яких система починає перевантажуватися. До того ж, використовуючи ймовірнісні моделі збоїв, можна протестувати стійкість системи до відмов серверів або інших компонентів. Це допомагає визначити оптимальні стратегії для відновлення роботи системи в разі збою.

Результати, отримані під час тестування з використанням математичних моделей, можуть бути використані для оптимізації як самої системи, так

і процесу тестування. Наприклад, якщо моделювання показує, що за певних умов навантаження система зазнає значних затримок, це може підказати, де потрібно оптимізувати алгоритми або інфраструктуру.

Висновки. У статті було розглянуто застосування математичних моделей у процесі автоматизованого тестування вебдодатків, акцентовано увагу на моделях черг та ймовірнісних підходах. Завдяки впровадженню моделей черг можна точно оцінити продуктивність вебдодатків за різних умов навантаження, а ймовірнісні моделі дають змогу моделювати різноманітні сценарії збоїв та пікових навантажень і оцінити надійність вебдодатків. Інтеграція наведених моделей у процес автоматизованого тестування за допомогою

інструментів, як-от JMeter та Selenium, відкриває нові можливості для аналізу продуктивності. Цей підхід допомагає створювати реалістичні сценарії навантаження, а також перевіряти стійкість системи до збоїв у реальних умовах експлуатації. Важливо зазначити, що в майбутньому можна розширити застосування математичних моделей на будь-які типи вебдодатків та інші технології, як-от мікросервіси та хмарні рішення. Отже, використання математичних моделей у процесі автоматизованого тестування вебдодатків потребує подальшого дослідження, оскільки це є перспективним напрямом, який дає можливість покращити якість і надійність програмного забезпечення, а також забезпечити кращий досвід для користувачів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Fewster M., Graham D. Software Test Automation: Effective Use of Test Execution. Addison-Wesley, 1999. 574 p.
2. Trivedi K.S. Probability and Statistics with Reliability, Queuing, and Computer Science Applications, 2nd Edition. Wiley, 2001. 830 p.
3. Kleinrock, L. Queueing Systems. Volume 1: Theory. Wiley-Interscience, 1975. 417 p.
4. Boucherie R.J., van Dijk N.M. Queueing Networks: A Fundamental Approach. New York: Springer, 2010. 824 p.
5. Jain R. The Art of Computer Systems Performance Analysis: Techniques For Experimental Design, Measurement, Simulation, and Modeling. URL: https://www.researchgate.net/publication/259310412_The_Art_of_Computer_Systems_Performance_Analysis_Techniques_For_Experimental_Design_Measurement_Simulation_and_Modeling_NY_Wiley (дата звернення: 19.10.2024).
6. Lu J. Performance Analysis of a Web Server. Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/220156026_Performance_Analysis_of_a_Web_Server (дата звернення: 16.10.2024).
7. Shortle J.F., Thompson J.M., Gross D., Harris C.M. Fundamentals of Queueing Theory. 2018. 548 p. DOI: 10.1002/9781119453765.
8. Карташов М. В. Ймовірність, процеси, статистика. Київ : ВПЦ Київ. ун-т, 2007. 504 с.
9. Leon-Garcia A. Probability, Statistics, and Random Processes For Electrical Engineering. Pearson, 2007. 832 p.
10. Selenium [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://www.selenium.dev> (дата звернення: 02.11.2024).
11. Apache JMeter [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://jmeter.apache.org> (дата звернення: 02.11.2024).

REFERENCES

1. Fewster, M., Graham, D. (1995). Software Test Automation: Effective Use of Test Execution. Addison-Wesley. 574 p.
2. Trivedi, K.S. (2001). Probability and Statistics with Reliability, Queuing, and Computer Science Applications. Wiley. 830 p.
3. Kleinrock, L. (1975). Queueing Systems. Volume 1: Theory. Wiley-Interscience. 417 p.
4. Boucherie, R.J., van Dijk, N.M. (2010). Queueing Networks: A Fundamental Approach. New York: Springer. 824 p.
5. Jain, R. (1991). The Art of Computer Systems Performance Analysis: Techniques For Experimental Design, Measurement, Simulation, and Modeling. URL: https://www.researchgate.net/publication/259310412_The_Art_of_Computer_Systems_Performance_Analysis_Techniques_For_Experimental_Design_Measurement_Simulation_and_Modeling_NY_Wiley (access date: 19.10.2024).
6. Lu, J. (2008). Performance Analysis of a Web Server. URL: https://www.researchgate.net/publication/220156026_Performance_Analysis_of_a_Web_Server.
7. John F. Shortle, James M. Thompson, Donald Gross, Carl M. Harris (2018). Fundamentals of Queueing Theory. 548 p. DOI: 10.1002/9781119453765.
8. Kartashov, M.V. (2007). Imovirnist, protsesy, statystyka. Kyiv: VPTs Kyiv University. 504 p. [in Ukrainian].
9. Leon-Garcia, A. (2007). Probability, Statistics, and Random Processes For Electrical Engineering. Pearson. 832 p.
10. Selenium. URL: <https://www.selenium.dev> (access date: 02.11.2024).
11. Apache JMeter. URL: <https://jmeter.apache.org> (access date: 02.11.2024).

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У ЖУРНАЛІ «COMPUTER SCIENCE AND APPLIED MATHEMATICS»

Вимоги до оформлення статей:

До друку приймаються статті, що мають наукову і практичну цінність. Автор має право представити тільки одну наукову статтю в один номер, яка раніше не публікувалася. Автор несе відповідальність за оригінальність тексту статті, точність наведених фактів, цитат, статистичних даних, власних назв, географічних назв та інших відомостей, а також за те, що в матеріалах не містяться дані, що не підлягають відкритій публікації. Редакція не несе відповідальності за викладену в статті інформацію. Остаточне рішення про публікацію ухвалюється редакцією, яка також залишає за собою право на додаткове рецензування, редагування і відхилення статей.

Технічні вимоги:

- до друку приймаються статті українською, російською та англійською мовами;
- електронний варіант статті у форматі *.doc, *.docx або *.rtf, підготовлений у текстовому редакторі Microsoft Word;
- формат А4 через 1,5 інтервал;
- шрифт Times New Roman, розмір 14;
- поля: ліве – 3 см, праве – 1,5 см, верхнє, нижнє – 2 см.

Структура статті:

- рядок 1** – УДК (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 2** – назва тематичного розділу (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 3** – назва статті (вирівнювання по центру, напівжирний шрифт, великі літери);
- рядок 4** – прізвище та ініціали автора статті; науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри (вирівнювання по центру);
- рядок 5** – місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора (вирівнювання по центру).

Якщо автор не має orcid-коду, його можна отримати за посиланням <https://orcid.org/>

абзац 1 – розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані мовою, як і уся стаття;

абзац 2 – назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, **розширена** анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані **англійською мовою**. Переклад англійською мовою повинен бути достовірним (не машинним).

У випадку, якщо стаття не українською мовою, обов'язково подаються назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані українською мовою.

Основний текст статті повинен відповідати структурі IMRAD (Introduction, Methods, Results, and Discussion) + Literature Review:

Вступ – короткий вступ (1-2 сторінки), який повинен дати відповіді на запитання «чому проведено дослідження?», «які об'єкт, мета й основні гіпотези дослідження?»; Огляд літератури - розділ, що містить аналіз останніх публікацій за темою дослідження (переважна більшість публікацій повинна бути за останні 5 років, самоцитовання не більше 30% від кількості літературних джерел), з огляду літератури читачі повинні мати змогу оцінити стан проблеми у світі, аналіз літературних джерел повинен мати критичний характер;

Методи – розділ, який може включати 2-3 рівнозначних за обсягом параграфи, що висвітлюють основні методи, підходи, алгоритми дослідження;

Результати – розділ, який містить аналіз основних результатів дослідження (графіки, таблиці з чисельними даними, загалом, результати обчислювальних експериментів); Дискусія – розділ (до 1 сторінки), який також можна назвати Висновок або Висновки, що містить порівняння отриманих результатів з результатами інших досліджень (як власних так інших авторів), а також дає відповідь на запитання «які перспективи дослідження?», формулює наукову новизну результатів.

Література розміщується після статті у порядку згадування; друкується через 1,5 інтервал, 14 розміром, шрифтом Times New Roman і оформляється у відповідності вимог міждержавного стандарту ДСТУ 8302:2015.

Посилання на літературу в тексті слід давати в квадратних дужках, наприклад, [2, с. 25; 5, с. 33], в яких перша цифра вказує порядковий номер джерела в списку літератури, а друга – відповідну сторінку в цьому джерелі; одне джерело (без сторінок) відокремлюється від іншого крапкою з комою [3; 4; 6; 8; 12; 15].

Наприкінці статті розміщується транслітерована і перекладена англійською версія літератури (References), оформлена згідно з вимогами APA (American Psychological Association).

Порядок подання матеріалів:

Для публікації статті у фаховому науковому виданні необхідно надіслати на електронну адресу редакції editor@physmath.journalsofznu.zp.ua наступні матеріали:

добре вчитану наукову статтю, обов'язково оформлену відповідно до вказаних вимог;
інформаційну довідку про автора;
відскановане підтвердження сплати коштів (реквізити для сплати надаються автору після вдалого проходження рецензування).

Зразок оформлення назви електронних файлів: Іваненко_І.І._стаття, Іваненко_І.І._оплата.

Адреса та контактні дані:

Редакція журналу «Computer Science and Applied Mathematics»
 вул. Університетська 66, корп. 1, ауд. 21(б), м. Запоріжжя, Україна, 69060

Телефон: +38 (066) 53 57 687

Електронна пошта: editor@physmath.journalsofznu.zp.ua

Офіційний сайт: www.journalsofznu.zp.ua/index.php/comp-science

НОТАТКИ

Науковий журнал

Computer Science and Applied Mathematics

№ 1, 2025

Комп'ютерна верстка – Н.С. Кузнєцова
Коректура – Я.І. Вишнякова

Підписано до друку: 30.04.2025.
Формат 60x84/8. Гарнітура Times New Roman.
Папір офсет. Цифровий друк. Ум. друк. арк. 16,04.
Замов. № 0525/358. Наклад 100 прим.

Видавництво і друкарня – Видавничий дім «Гельветика»
65101, м. Одеса, вул. Інглезі, 6/1
Телефони: +38 (095) 934 48 28, +38 (097) 723 06 08
E-mail: mailbox@helvetica.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 7623 від 22.06.2022 р.